

Legnagyobb közös osztó

Feladatsor

Diszkrét modellek alkalmazásai

Matematikai kérdések

1. Mit jelent két szám legnagyobb közös osztója? Mutassuk be a definíciót 6-ra és 4-re.
2. Mit jelent két szám legkisebb közös többszöröse? Mutassuk be a definíciót 6-ra és 4-re.
3. Mikor mondjuk, hogy két szám relatív prím? Adjunk meg *három* olyan x -et, hogy 12 és x relatív prímek.
4. Relatív prímek-e a 4, 5 és 6? *Páronként* relatív prímek-e?
5. Számítsuk ki 200 és 120 legnagyobb közös osztóját és legkisebb közös többszörösét a prímtenyezős felbontásuk segítségével.
6. Számítsuk ki az euklideszi algoritmus segítségével:
a) $\text{lko}(39, 15)$; b) $\text{lko}(32, 20)$; c) $\text{lko}(12, 7)$; d) $\text{lko}(200, 120)$; e) $\text{lko}(39, 30)$;
f) $\text{lko}(125, 90)$; g) $\text{lko}(157, 15)$; h) $\text{lko}(102, 72)$; i) $\text{lko}(55, 34)$; j) $\text{lko}(700, 300)$.
7. Végezzük el a fenti számpárookra a *bővített* euklideszi algoritmust is. Írjuk fel az eredményként kapott összefüggéseket.
8. Adjuk meg a következő lineáris diofantikus egyenletek *egy-egy* megoldását (ha van):
a) $39x + 15y = 6$; b) $32x + 20y = 10$; c) $12x + 7y = -4$; d) $200x + 120y = 4000$.
9. Írjuk fel a fenti lineáris diofantikus egyenletek *összes* megoldását.
10. Egy szigeten 7- és 12-fejű sárkányok élnek. A fejük száma összesen 100. Hány sárkány él a szigeten? Oldjuk meg lineáris diofantikus egyenlet segítségével.

Programozási feladatok

11. Írjunk függvényt, amely adott $a, b \in \mathbb{N}^+$ számokra kiszámítja a legnagyobb közös osztójukat
- a prímtényezős felbontás (`factor()`) segítségével;
 - az euklideszi algoritmus *naiv* verziójával (azaz kivonással);
 - az euklideszi algoritmussal (azaz maradékos osztással).
- Teszteljük a megoldásokat minden $1 \leq a, b \leq 50$ számpárra. Melyek működnek 0-ra is?
12. Hasonlítsuk össze az előző feladat megoldásainak sebességét az alábbiak szerint.
- Legyen a és b két-két nagy véletlen prímszám szorzata, pontosabban $a := pq$ és $b := pr$, ahol p, q és r három véletlen prímszám. A prímszámok 2 és 10^n között lehetnek, ahol n egyre nagyobb kitevő: $n = 2, 3, 4, \dots, 40$. (Azaz a és b nagyjából hasonló nagyságrendű lesz, és úgy csináltuk, hogy $\text{lko}(a, b) = p$ legyen.) Melyik változat mekkora n -ig használható?
 - Módosítsuk az előző méréseket úgy, hogy most b sokkal kisebb, mint a , pontosabban legyen r mindig csak 2 és 100 között, míg p és q változatlanul 2 és 10^n között vannak. Mi változik?
13. Írjunk függvényt, amely kiszámítja $\text{lkkt}(a, b)$ -t az $\text{lko}(a, b)$ segítségével. Teszteljük minden $0 \leq a, b \leq 50$ számpárra.
14. Írjunk függvényt, amely kiszámítja $\text{lko}(a_1, a_2, \dots, a_n)$ -t a kétváltozós $\text{lko}(a, b)$ segítségével. A bemenő számokat a függvény egy listában kapja meg.
15. Implementáljuk a bővített euklideszi algoritmust: írjunk függvényt, amely adott $a, b \in \mathbb{N}^+$ számokra kiszámítja $\text{lko}(a, b)$ -t, valamint a és b Bézout-együtthatóit.
16. Tekintsük az $ax + by = c$ lineáris diofantikus egyenletet, ahol $a, b, c \in \mathbb{N}^+$ bemenő paraméterek, és oldjuk meg rá az alábbi feladatokat. Teszteléshez használhatjuk a 8-as és a 10-es feladat egyenleteit, valamint próbáljuk ki a következő egyenletre is:
- $$12345678x + 89009765y = 1122334455667788.$$
- Írjunk függvényt, amely visszaadja az egyenlet egy megoldását (egy (x, y) párt), vagy `None`-t, ha nem megoldható.
 - Írjunk függvényt, amely visszaad n egymást követő megoldást (ahol $n \in \mathbb{N}^+$ szintén bemenő paraméter) egy listában: $[(x_1, y_1), (x_2, y_2), \dots, (x_n, y_n)]$.
 - Írjunk függvényt, amely visszaadja az összes nemnegatív megoldást egy listában.