

SageMath bevezetés

Feladatsor

Diszkrét modellek alkalmazásai

1. Számítsuk ki a következő kifejezés pontos értékét (ami egy egész szám):

$$\sqrt{\frac{(\operatorname{tg}(-\frac{7}{12}\pi) - 2)^2}{\frac{123456}{(\frac{1}{2})^{-13} + 9! - 8 \cdot 88} - 2^{\binom{42}{5} - (2^8 + 1) \cdot 3310}}}$$

2. Hozzunk létre egy-egy listát a következő elemekkel:

- a) kettőhatványok 1-től 2^{20} -ig;
- b) faktoriálisok 0!-tól 20!-ig: $[1, 1, 2, 6, 24, \dots]$;
- c) x -hatványok 100-ig: $[1, x, x^2, x^3, \dots, x^{100}]$;
- d) a Pascal-háromszög 10. sora;
- e) 10 lista, ahol az n . lista a Pascal-háromszög n . sora: $[[1], [1, 1], [1, 2, 1], \dots]$;
- f) a szögek szinusza 0° -tól 360° -ig 30° -onként: $[0, 1/2, \sqrt{3}/2, \dots, 0]$;
- g) $\sin(2x)$ és az első 20 deriváltja (mi a szabály?).

3. Hozzuk létre a következő mátrixokat:

- a) szorzótábla (azaz $a_{ij} = i \cdot j$) 1-től 10-ig;
- b) sorfolytonosan a páros számok 2-től 200-ig egy 10×10 -es mátrixban;
- c) 10×10 -es egységmátrix (azaz a főátlóban 1-esek vannak, azon kívül pedig 0-k);
- d) a Pascal-háromszög első 10 sora (0-kkal kiegészítve négyzet alakúra);
- e) Vandermonde-mátrix egy adott bemenő vektorra, amely pl. (a_1, a_2, a_3, a_4) -re így néz ki:

$$\begin{pmatrix} 1 & a_1 & a_1^2 & a_1^3 \\ 1 & a_2 & a_2^2 & a_2^3 \\ 1 & a_3 & a_3^2 & a_3^3 \\ 1 & a_4 & a_4^2 & a_4^3 \end{pmatrix}$$

(függvényt írjunk, amelynek a vektor a paramétere, amely tetszőleges elemszámú lehet).

4. a) Írjunk függvényt, amely adott n -re kiszámítja a Pascal-háromszög n -edik sorának összegét.
b) Tegyük egy listába ezeket az összegeket $n = 0$ -tól 10-ig.
c) Mi a szabály? Fogalmazzuk meg a sejtést, és ellenőrizzük $n = 0$ -tól 100-ig.
5. Adjuk össze 1-től 12345-ig a 3-mal osztható számokat – legalább háromféleképpen. Mindegyik megoldást külön függvénybe írjuk. A függvények nem várnak paramétert, és visszaadják (nem kiírják!) az összeget.

6. Számítsuk ki az alábbi értékeket $n = 0$ -tól 10-ig, és tegyük be őket egy-egy listába (tehát minden lista 11 egész számot fog tartalmazni):
- a) a Fibonacci-számokat a Sage `fibonacci(n)` függvényével;
 - b) a következő rekurzív sorozat elemeit: $F_0 := 0$, $F_1 := 1$, $F_n := F_{n-1} + F_{n-2}$;
 - c) az $F := \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ mátrix minden F^n hatványának jobb felső elemét;
 - d) a $\sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor} \binom{n-k-1}{k}$ összegeket, ahol $\lfloor \cdot \rfloor$ az alsó egészrészt jelöli (megjegyzés: a Pascal-háromszög "ferde" átlóit összegezzük);
 - e) a $\frac{\varphi^n - (1-\varphi)^n}{\sqrt{5}}$ kifejezés pontos értékeit (nem közelítéseit!), ahol $\varphi := \frac{\sqrt{5}+1}{2}$ az arany-metszés arányszáma (a végeredményben ne maradjanak gyökök – ehhez használhatjuk a `(...).simplify_full()` függvényt).