

Diszkrét matematika I. feladatok

Relációk II.

Negyedik alkalom (2025.03.03-07.)

Bemelegítő feladatok

- Döntse el, mely reláció reflexív, szimmetrikus, antiszimmetrikus illetve tranzitív.
 - $R_1 = \{(1, 1), (1, 2), (1, 3), (2, 1), (2, 2), (2, 3), (3, 1), (3, 2), (3, 3)\} \subset \{1, 2, 3\}^2$
 - $R_2 = \{(1, 1), (1, 2), (1, 3), (2, 1), (2, 2), (3, 1), (3, 3)\} \subset \{1, 2, 3\}^2$
 - $R_3 = \{(1, 1), (1, 3), (2, 2), (2, 4), (3, 1), (3, 3), (4, 2), (4, 4)\} \subset \{1, 2, 3, 4\}^2$
 - $R_4 = \{(1, 1), (2, 3), (2, 5), (3, 2), (3, 3), (3, 5), (4, 4), (5, 2), (5, 3), (5, 5), (5, 2), (5, 4)\} \subset \{1, 2, 3, 4, 5\}^2$
- Tekintsük az 1. feladat relációit. Melyik lesz ekvivalenciareláció? Ekvivalenciareláció esetében határozza meg az osztályfelbontást!

Gyakorló feladatok

- Döntse el, mely reláció reflexív, irreflexív, szimmetrikus, antiszimmetrikus illetve tranzitív, továbbá határozza meg a relációk értelmezési tartományát és értékkészletét.
 - $R = \{(a, b) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \mid a \cdot b \text{ páratlan}\}$
 - $T_X = \{(A, B) \in 2^X \times 2^X \mid A \cap B \neq \emptyset\}$, ahol X adott halmaz
 - $S = \{(M, N) \in \mathbb{R}^{2 \times 2} \times \mathbb{R}^{2 \times 2} \mid \exists P \in \mathbb{R}^{2 \times 2}, \det P \neq 0, M = P^{-1}NP\}$
- Bizonyítsa be, hogy az alábbi relációk ekvivalenciarelációk. Adja meg az ekvivalenciaosztályokat.
 - Adott $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^2$ esetén $\mathbf{u} \sim \mathbf{v}$, ha $|\mathbf{u}| = |\mathbf{v}|$.
 - Legyen $m > 1$ egész és $a, b \in \mathbb{Z}$ esetén $a \sim b$, ha $m \mid (a - b)$.
 - Legyen $\mathbf{z} \in \mathbb{R}^2$ egy nem-nulla vektor és $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^2$ esetén $\mathbf{u} \sim \mathbf{v}$, ha $\mathbf{u}^T \mathbf{z} = \mathbf{v}^T \mathbf{z}$.

Érdekes feladatok

- Konstruáljon az $\{1, 2, 3, 4\}$ halmazon olyan relációt, amely
 - reflexív és nem irreflexív
 - antiszimmetrikus és nem szimmetrikus
 - szimmetrikus és nem antiszimmetrikus
 - nem reflexív, nem tranzitív, nem szimmetrikus, nem antiszimmetrikus, nem trichotóm

6. a) Lehet-e egy reláció egyszerre szimmetrikus és antiszimmetrikus? Illetve reflexív és irreflexív? Állítását indokolja.
- b) Bizonyítsuk be, hogy minden reláció, amely egyszerre szimmetrikus és antiszimmetrikus, egyúttal tranzitív is.

Beadandó házi feladatok

7. Konstruáljon az $\mathbb{Z}$ halmazon olyan relációt, amely
 - a) tranzitív és nem irreflexív
 - b) reflexív és antiszimmetrikus
 - c) nem tranzitív és dichotóm
 (részenként 1/3 pont)
8. Bizonyítsa be, hogy az alábbi relációk ekvivalenciarelációk. Adja meg az ekvivalenciaosztályokat. (részenként 1/2 pont)
 - a) Adott $x, y \in \mathbb{R}$ esetén $x \sim y$, ha $x - y \in \mathbb{Z}$.
 - b) Adott $\mathbf{m} = (m_1, m_2)$ és $\mathbf{n} = (n_1, n_2) \in \mathbb{Z} \setminus \{0\} \times \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ esetén $\mathbf{n} \sim \mathbf{m}$, ha $n_1 m_2 = m_1 n_2$.
9. Tekintsük az alábbi relációkat! Döntse el, hogy azok ekvivalenciarelációk-e. Ha nem, mely tulajdonságokat teljesítik? (részenként 1/2 pont)
 - a) Adott $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^2$ esetén $\mathbf{u} \sim \mathbf{v}$, ha $\mathbf{v} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \mathbf{u}$.
 - b) Adott $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^2$ esetén $\mathbf{u} \sim \mathbf{v}$, ha $\mathbf{v} = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}^n \mathbf{u}$ valamely $n \in \mathbb{Z}$ egészre.