

Polinomok

(feladatsor)

Diszkrét modellek alkalmazásai

1. Állítsuk elő az alábbi polinomokat tetszőleges $n \in \mathbb{N}^+$ -ra. Írassuk ki őket $n = 5$ -re.
(Az eredmény típusa polinom legyen, ne általános szimbolikus kifejezés.)
 - a) $nx^n + (n-1)x^{n-1} + (n-2)x^{n-2} + \dots + 2x^2 + x$;
 - b) $x^{2n} + x^{2n-2} + \dots + x^4 + x^2 + 1$;
 - c) melynek gyökei $1, 2, 3, \dots, n$ (mind egyszeres);
 - d) melynek egyetlen, de n -szeres gyöke 2 ;
 - e) melynek 1 1-szeres gyöke, 2 2-szeres gyöke, $\dots$, n n -szeres gyöke.
2. Írjunk függvényt, amely kiszámítja egy p polinom c helyen felvett helyettesítési értékét a Horner-módszerrel. (A polinomnak csak az együtthatóit használhatjuk.)
3. Módosítsuk az előző függvényt úgy, hogy a p -nek az $x - c$ -vel vett maradékos osztásának hányadosát és maradékát is visszaadja (ugyanolyan formában, mint `p.quo_rem(x-c)`).
4. Keressünk olyan c egész számot, amelyre az $x^5 - cx^2 - cx + 1$ polinomnak -1 többszörös gyöke.
5. Keressünk olyan c egész számot, amelyre $x^2 + cx + c^2$ osztója $x^5 + 3x^3 - x^2 + 14x + 4$ -nek.
6.
 - a) Implementáljuk az euklideszi algoritmust polinomokra $\mathbb{Q}[x]$ -ben.
 - b) Implementáljuk a bővített euklideszi algoritmust polinomokra $\mathbb{Q}[x]$ -ben.
 - c) Próbáljuk ki mind a kettőt a $2x^3 + x^2 - 2x - 1$ és az $x^2 - 2x + 1$ polinomokra, és ellenőrizzük az eredményt a Sage beépített függvényeivel.
7. Határozzuk meg $2x^3 + x^2 - 2x - 1$ és $x^2 - 2x + 1$ közös gyökeit anélkül, hogy a két polinom gyökeit külön-külön kiszámítanánk.
8. Írjunk függvényt, amely kiszámítja egy polinom algebrai deriváltját. Csak az együtthatóival dolgozzunk, ne használjunk polinomműveleteket.
9.
 - a) Állítsuk elő azt a hatodfokú p polinomot, melynek 5 egyszeres, 6 kétszeres és 7 háromszoros gyöke. (Az eredmény polinom típusú legyen.) Ellenőrizzük p -t a `roots()` tagfüggvénnyel.
 - b) Számítsuk ki $\text{lko}(p, p')$ gyökeit. Mi a köze p gyökeihez?
 - c) Számítsuk ki $p / \text{lko}(p, p')$ gyökeit. Mi a köze p gyökeihez?
10. Írjunk függvényt, amely egy adott p polinomra és c számra kiszámítja $p(c)$ -t és $p'(c)$ -t egyszerre, a Horner-módszer segítségével, p' -t kiszámítása nélkül.