

SageMath bevezetés

(feladatsor)

Diszkrét modellek alkalmazásai

1. Számítsuk ki a pontos értékét:

a) 2^{100} ; b) $2^{2^{10}}$; c) $(2^2)^{10}$; d) $2^{(2^{10})}$; e) $2^{2^{2^2}}$; f) $2^{2^{2^{2^2}}}$; g) $2^{(2^{2^2})^2}$;
h) $1024!$; i) $(5!)!$; j) $((3!)!)!$; k) $(((((2!)!)!)!)!)!$; l) $\binom{100}{10}$; m) $\binom{\binom{10}{3}}{\binom{10}{2}}$.

2. Számítsuk ki a pontos értékét:

$$\sqrt{\frac{(\operatorname{tg}(-\frac{7}{12}\pi) - 2)^2}{\frac{123456}{(\frac{1}{2})^{-13} + 9! - 8.88} - 2^{\binom{42}{5} - (2^8 + 1) \cdot 3310}}}$$

3. Számítsuk ki numerikusan:

a) $3 + \frac{1}{7}$; b) $3 + \frac{1}{7 + \frac{1}{15}}$; c) $3 + \frac{1}{7 + \frac{1}{15 + \frac{1}{1}}}$; d) $3 + \frac{1}{7 + \frac{1}{15 + \frac{1}{1 + \frac{1}{2^{92}}}}}$.

4. Számítsuk ki:

a) $\sqrt{-64}$; b) $\frac{4 + 3i}{(2 - i)^2}$; c) $\frac{(1 + \sqrt{3}i)^{18}}{(\sqrt{2} - \sqrt{2}i)^{15}}$; d) $\frac{\overline{1 - i}}{(2 + i)^2} - \frac{1}{3 - i}$.

5. Hozzuk egyszerűbb alakra:

$$\left(\frac{1 - \sqrt{x}}{1 + \sqrt{x}} + \frac{1 + \sqrt{x}}{1 - \sqrt{x}} \right) \cdot \frac{1 - x^2}{x^2 + 2x + 1}$$

6. Oldjuk meg (és ellenőrizzük):

a) $x^2 - 3x + 2 = 0$; b) $x^2 - x - 1 = 0$; c) $x^2 - 6x + 13 = 0$; d) $x^2 + x + 1 = 0$;
e) $x^3 - 10x^2 + 34x = 0$; f) $x^{12} = 1$; g) $x^3 = -64$;
h) $x^7 + 3x^6 - 10x^5 - 18x^4 + 29x^3 - 9x^2 + 40x + 12 = 0$;
i) $x^7 + 3x^6 - 10x^5 - 18x^4 + 28x^3 - 9x^2 + 40x + 12 = 0$.

7. Oldjuk meg x -re, paraméteresen:

a) $\frac{x}{a} + \frac{x}{b} = 1$; b) $ax + b = c$; c) $ax^2 + (2 - a^2)x - 2a = 0$.

8. Írjuk fel az általános

a) másodfokú egyenlet; b) harmadfokú egyenlet; c) negyedfokú egyenlet
megoldóképletét.

9. Oldjuk meg:

$$\text{a) } \begin{cases} 2x + 3y - z = 5 \\ 3x - 2y + z = 2 \\ x + y - z = 0; \end{cases} \quad \text{b) } \begin{cases} 4x + y + 5z = 5 \\ 3x + 2y + 2z + w = 4 \\ 2x + 3y - z + 2w = 3. \end{cases}$$

10. Írjuk fel általánosan a kétváltozós lineáris egyenletrendszerek megoldását.

11. Számítsuk ki zárt alakban:

$$\text{a) } \sum_{k=1}^n k; \quad \text{b) } \sum_{k=1}^n k^2; \quad \text{c) } \sum_{k=1}^{n+1} \binom{k}{2}; \quad \text{d) } \sum_{k=1}^n \sum_{j=1}^k j; \quad \text{e) } \prod_{k=1}^n k^2;$$

12. Bizonyítsuk be:

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{(4k-3)(4k+1)} = \frac{n}{4n+1}.$$

13. Számítsuk ki:

$$\begin{aligned} \text{a) } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^4 - x^3 - 3}{2x^4 + 3x^2 + 1}; \quad & \text{b) } \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n; \quad \text{c) } \left(\frac{x+2}{x^2+3}\right)'; \quad \text{d) } \left(\left(1 + \frac{1}{x}\right)^x\right)'; \\ \text{e) } \sin(2x)'; \quad & \text{f) } \sin(2x)''; \quad \text{g) } \sin(2x)'''; \quad \text{h) } \int_0^1 x^2 dx; \quad \text{i) } \int \ln x \, dx; \quad \text{j) } \int_5^7 \frac{x+2}{x^2+3} dx. \end{aligned}$$

14. Legyen

$$\bullet A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 2 & 3 & 4 \end{bmatrix}, \quad \bullet B = \begin{bmatrix} 4 & 2 & -1 \\ 1 & 3 & 7 \end{bmatrix}, \quad \bullet C = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 3 & -1 & 2 \end{bmatrix}.$$

Számítsuk ki az $(A - B) \cdot C^T$ mátrix inverzét.

15. Számítsuk ki a 2×2 -es, ill. 3×3 -as mátrixok determinánsát általánosan.

16. Adjuk össze 1-től 100-ig a számokat – legalább háromféleképpen.

17. Hozzunk létre egy listát, melynek elemei:

- a) az első 20 faktoriális: $[1, 2, 6, 24, \dots]$;
- b) a Pascal-háromszög 10. sora;
- c) 10 lista, ahol az n . lista a Pascal-háromszög n . sora: $[[1], [1, 1], [1, 2, 1], \dots]$;
- d) a szögek szinusza 0° -tól 360° -ig 30° -onként;
- e) az x -hatványok 100-ig $[1, x, x^2, x^3, \dots, x^{100}]$;
- f) $\sin(2x)$ és az első 20 deriváltja (mi a szabály?).

18. Hozzunk létre a következő mátrixokat:

- a) szorzótábla (azaz $a_{ij} = i \cdot j$) 1-től 10-ig;
- b) Pascal-háromszög első 16 sora (0-kkal kiegészítve négyzet alakúra).

19. a) Írjunk egy függvényt, amely adott n -re kiszámítja az $1 + x + x^2 + x^3 + \dots + x^{n-1}$ polinomot.

b) Hívjuk meg $n = 100$ -ra, és szorozzuk meg $(x - 1)$ -gyel (és egyszerűsítsük). Mit kapunk? Miért?

c) Írassuk ki $n = 1$ -től 20-ig az a)-beli polinomok szorzattá bontott alakját. Mi a kapcsolat az n . polinom felbonthatósága és az n szám tulajdonságai között? Fogalmazzuk meg a sejtést.

d) Írjuk ki a `cyclotomic_polynomial(n)` beépített függvény értékeit $n = 1$ -től 20-ig. Mi a köze a fentiekhez? Olvassunk utána! (Magyarul: körosztási polinom.)

e) Mennyi az $n + 1$ -edik polinom n -edik deriváltja? Mi a szabály? Miért?

20. a) Írjunk függvényt, amely adott n -re kiírja az n -edik komplex egységgyököket.

b) Írassuk ki az eredményt $n = 1$ -től 12-ig.

c) Van valami köze ennek az előző feladathoz?

d) Írjunk egy másik függvényt, amely csak a primitív egységgyököket írja ki. (Minek a gyökei ezek?)

21. Keressünk olyan b egész számot, amelyre az $x^3 + bx^2 + 12x - 8 = 0$ egyenletnek pontosan egy megoldása van.

22. Keressünk olyan 1 főegyütthatójú egész együtthatós másodfokú egyenletet ($x^2 + bx + c = 0$, ahol $b, c \in \mathbb{Z}$), amelyet az aranymetszés arányszáma $\left(\phi = \frac{\sqrt{5} + 1}{2}\right)$ kielégít.

23. Számítsuk ki az alábbi sorozat első 20 értékét numerikusan:

$$\bullet 1 + 1; \quad \bullet 1 + \frac{1}{1+1}; \quad \bullet 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1+1}}; \quad \bullet 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1+1}}}; \quad \bullet \dots$$

Mihez közelít az érték?

24. Számítsuk ki az alábbi részletösszegeket numerikusan $n = 1$ -től 20-ig.

$$\sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} = \frac{1}{1} + \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3!} + \dots + \frac{1}{n!}$$

Mihez közelít az érték? Számoljuk ki az összeget szimbolikusan ∞ -ig.

25. Írjunk egy függvényt, amely kiszámítja a Vandermonde-mátrixot egy bemenő vektorra, azaz pl. az (a_1, a_2, a_3, a_4) vektorra a következő mátrixot:

$$\begin{pmatrix} 1 & a_1 & a_1^2 & a_1^3 \\ 1 & a_2 & a_2^2 & a_2^3 \\ 1 & a_3 & a_3^2 & a_3^3 \\ 1 & a_4 & a_4^2 & a_4^3 \end{pmatrix}.$$

Hívjuk meg a függvényt a szimbolikus változókból álló (a, b, c, d, e) vektorral, számítsuk ki a mátrix determinánsát, és bontsuk szorzattá az eredményt. Próbáljuk ki különböző méretű vektorokra. Milyen szabályosság figyelhető meg?