Relációk

Diszkrét matematika I. – feladatsor

1. Legyen
   - $A = \{1, 2, 3, 4\}$, • $B = \{5, 6, 7, 8, 9\}$,
   - $R \subseteq A \times B$, $R = \{(1, 5), (1, 6), (1, 7), (3, 6), (3, 9), (4, 5), (4, 7), (4, 9)\}$.

   a) Rajzoljuk fel R gráfját. b) Mi R értelmezési tartománya és értékkészlete?
   c) Szűkítsük le R-et az $\{1, 2, 3\}$ halmazra. d) Szűkítsuk le R-et a $\{4\}$ halmazra.
   e) Írjuk fel R^{-1}-et. f) Írjuk fel az $R(\{1, 2\})$ képet.
   g) Írjuk fel az $R^{-1}(\{5, 6\})$ inverz képet.

2. Legyen A, B és R mint fent. Mely relációk kiterjesztései az R-nek:
   a) $\{(1, 5), (1, 6), (1, 7), (2, 2), (2, 4), (3, 6), (3, 9), (4, 3), (4, 5), (4, 7), (4, 9)\}$;
   b) $\{(1, 5), (1, 6), (1, 7), (3, 6), (3, 8), (4, 5), (4, 6), (4, 7), (4, 9)\}$;
   c) $A \times B$; d) $B \times A$?

3. Legyen
   - $M = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, • $N = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$, • $A = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix} \right\}$.

   Számítsuk ki a következőket:
   - $\operatorname{dmn} R$, • $\operatorname{rng} R$, • $R(A)$, • $R^{-1}(A)$, • $R|_A$

   az alábbi R relációkra:
   a) $R = \{(u, v) \in \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \mid Mu = v\}$; b) $R = \{(u, v) \in \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \mid u = Nv\}$;
   c) $R = \{(u, v) \in \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \mid Mu = Nv\}$.

4. Legyen
   - $A = \{1, 2, 3\}, B = \{a, b, c, d, e, f\}, C = \{2, 4, 6, 8\}$;
   - $R \subseteq A \times B$, $R = \{(1, a), (1, b), (2, c), (2, f), (3, d), (3, e), (3, f)\}$;
   - $S \subseteq B \times C$, $S = \{(a, 2), (a, 4), (c, 6), (c, 8), (d, 2), (d, 4), (d, 6), (f, 8)\}$.

   Határozzuk meg $S \circ R$-et.

5. Legyen megint
   - $M = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, • $N = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$.

   Számítsuk ki az $R \circ S$ és $S \circ R$ relációkat, ha:
   a) $R = \{(u, v) \in \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \mid Mu = v\}$, $S = \{(u, v) \in \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \mid Nu = v\}$;
   b) $R = \{(u, v) \in \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \mid u = Mv\}$, $S = \{(u, v) \in \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \mid u = M^2 v\}$.

6. Legyen E az emberek halmaza, és
   - $G \subseteq E \times E$ a „gyereke” reláció; • $H \subseteq E \times E$ a „házastársa” reláció.

   Fejezzük ki ezek segítségével a következő relációkat / halmazokat:
   a) unokája; b) szülője; c) nagyszülője; d) anyósa vagy apósa; e) veje vagy menye;
   f) testvére vagy önmaga; g) házasok halmaza; h) nagyszülők halmaza.

7. Az alábbi relációk közül melyik
   • reflexív, • irreflexív, • szimmetrikus, • antiszimmetrikus,
   • szigorúan antiszimmetrikus, • tranzitív, • dichotóm, • trichotóm:
   a) $\leq_{\mathbb{R}}$; b) $<_{\mathbb{R}}$; c) $\subseteq$; d) $\subset$; e) $R \subseteq \mathbb{Z}^+ \times \mathbb{Z}^+,\ xRy \iff x \mid y$;
   f) {síkbeli körök}-ön a „van közös pontja”; g) {emberek}-en az „ismeri”;
   h) {emberek}-en a „rokona”; i) {emberek}-en a „testvére”;
   j) $X = \{\text{kő}, \text{papír}, \text{olló}\},\ R = \{(\text{kő}, \text{olló}), (\text{olló}, \text{papír}), (\text{papír}, \text{kő})\}$;
   k) $X = \{a, b, c\},\ R = \{(a, b), (b, a), (b, b), (a, c)\}$; l) $X = \{1, 2, 3\},\ R = X \times X$;
   m) $X = \{1, 2, 3\},\ R = \{(1, 1), (1, 2), (1, 3), (2, 1), (2, 2), (3, 1), (3, 3)\}$;

8. Adjunk példát olyan relációra az $\{1, 2, 3, 4\}$ halmazon, amely
   a) reflexív és nem irreflexív; b) nem reflexív és nem irreflexív;
   c) antiszimmetrikus és nem szimmetrikus; d) szimmetrikus és nem antiszimmetrikus;
   e) nem szimmetrikus és nem antiszimmetrikus; f) szimmetrikus és antiszimmetrikus;
   g) reflexív és trichotóm;
   h) nem reflexív, nem tranzitív, nem szimmetrikus, nem antiszimmetrikus, nem trichotóm.

9. Legyenek $R, S \subseteq A \times A$ szimmetrikus relációk. Bizonyítsuk be, hogy $R \circ S$ akkor és csak akkor szimmetrikus, ha $R \circ S = S \circ R$.

10. Bizonyítsuk be, hogy $R \subseteq X \times X$ ekvivalenciareláció. Milyen osztályozást határoz meg?
    a) $X = \{1, 2, 3, 4, 5\},\ R = \{(1, 1), (1, 5), (2, 2), (3, 3), (3, 4), (4, 3), (4, 4), (5, 1), (5, 5)\}$;
    b) $X = \mathbb{Z},\ aRb \iff 2 \mid (a + b)$; c) $X = \mathbb{N},\ aRb \iff 3 \mid (a^2 - b^2)$;
    d) $X = \mathbb{R},\ aRb \iff a - b \in \mathbb{Q}$; e) $X = \mathbb{Z},\ aRb \iff 5 \mid (a - b)$;
    f) $X = \mathbb{Z} \times \mathbb{Z},\ (a, b)R(c, d) \iff a + d = b + c$.
    g) $X = \mathbb{Z}^+ \times \mathbb{Z}^+,\ (a, b)R(c, d) \iff ad = bc$;
    h) $X = \mathbb{R}^2,\ aRb \iff |a| = |b|$; i) $X = \mathbb{R}^2,\ v \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\},\ aRb \iff \langle a, v\rangle = \langle b, v\rangle$.

11. Írjunk programot, amely adott véges R és S relációkra kiszámítja az $R \circ S$ és $S \circ R$ kompozíciókat.

12. Hány
    • reflexív, • irreflexív, • szimmetrikus, • antiszimmetrikus

    reláció létezik egy adott n-elemű halmazon?