Logika

Diszkrét matematika I. – feladatsor

1. $x, y \in \mathbb{N}^+$-ra legyen:
   • $P(x)$: x prím; • $S(x)$: x páros; • $T(x)$: x páratlan; • $O(x,y)$: x osztója y-nak.
   Fordítsuk le magyarra az alábbi formulákat. Igazak az állítások?

   a) $O(2,6)$; b) $S(2) \wedge P(2)$; c) $\forall x\,(O(4,x) \Rightarrow S(x))$; d) $\forall x\,(P(x) \Rightarrow T(x))$;
   e) $\exists x\,(O(x,15) \wedge S(x))$; f) $\forall x\,(S(x) \Rightarrow \neg P(x))$; g) $\forall x\,(O(2,x) \Leftrightarrow S(x))$;
   h) $\forall x\,(S(x) \Rightarrow (O(4,x) \vee O(6,x)))$; i) $\forall x\,(P(x) \Rightarrow \neg(O(3,x) \vee O(4,x))$; j) $T(4) \Rightarrow P(9)$;
   k) $\forall x\,(T(x) \Rightarrow \forall y\,(O(y,x) \Rightarrow T(y)))$; l) $\forall x\,(P(x) \Rightarrow \exists y\,(O(x,y) \wedge S(y)))$;
   m) $\forall x\,(T(x) \Rightarrow \forall y\,(P(y) \Rightarrow \neg O(x,y)))$; n) $\forall x\,(P(x) \Leftrightarrow \forall y\,(O(y,x) \Rightarrow (y = x \vee y = 1)))$;
   o) $\exists x\,(S(x) \wedge P(x) \wedge \neg\exists y\,(x \neq y \wedge S(y) \wedge P(y)))$.

2. Írjuk fel az előző feladat formuláinak a tagadását formálisan, ill. magyarul.

3. x és y emberre legyen:
   • $N(x)$: x nő; • $F(x)$: x férfi; • $G(x,y)$: x gyereke y-nak; • $H(x,y)$: x házastársa y-nak.

   Formalizáljuk, hogy x az y-nak a:
   a) fia; b) anyja; c) férje; d) unokája; e) nagyapja; f) anyai nagyanyja; g) anyósa;
   h) testvére; i) féltestvére; j) sógora; k) unokatestvére; l) nagybátyja.

4. Formalizáljuk az alábbi mondatokat (függetlenül igazságtartalmuktól). Ehhez definiáljunk további (minél egyszerűbb) predikátumokat, ahol szükséges.
   a) Minden bogár rovar. b) Nem minden rovar bogár. c) Van olyan rovar, amelyik lepke.
   d) Nincs olyan rovar, amelyik pók. e) Nem kég az ég. f) Nem igaz, hogy nem kék az ég.
   g) Esik az eső, de meleg van, bár a nap is előbújt, és az idő is későre jár.
   h) Elmegyük kirándulni, ha nem esik az eső, és a szél sem fúj.
   i) Szivárvány csak akkor van, ha esik az eső, a Nap is süt, de nincs dél.
   j) Minden apa idősebb a gyermekénél. k) Egyes anyák alacsonyabbak a gyermeküknél.
   l) Ha a szülők nem okosak, attól még a gyerekük lehet okos.
   m) Csak férfi és nő házasodhat össze. n) Egy embernek nem lehet több házastársa.
   o) Mindenki vagy nő, vagy férfi, de senki sem mindkettő egyszerre.
   p) Ha egy egyenes két pontja benne van egy síkban, akkor minden pontja benne van.
   q) Két pont egyértelműen meghatároz egy egyenest.
   r) Van három pont, amely nem esik egy egyenesbe.

5. Felmérést készítettek n ember olvasási szokásairól. Ebben m különböző könyvet vizsgáltak. Jelölje $O(E, K)$, hogy az E ember elolvasta a K könyvet.
   - Fordítsuk le magyarra az alábbi formulákat.
   - Melyik formula következik melyik másikból?

   a) $\exists E\, \forall K\; O(E, K)$; b) $\forall K\, \exists E\; O(E, K)$; c) $\exists K\, \forall E\; O(E, K)$;
   d) $\forall E\, \exists K\; O(E, K)$; e) $\forall E\, \forall K\; O(E, K)$; f) $\exists E\, \exists K\; O(E, K)$.

6. Bizonyítsuk be tetszőleges A, B és C predikátumokra:
   a) $A \wedge A \iff A$; b) $A \vee A \iff A$;
   c) $A \wedge (B \wedge C) \iff (A \wedge B) \wedge C$; d) $A \wedge (B \vee C) \iff (A \wedge B) \vee (A \wedge C)$;
   e) $A \vee (B \vee C) \iff (A \vee B) \vee C$; f) $A \vee (B \wedge C) \iff (A \vee B) \wedge (A \vee C)$;
   g) $A \oplus B \iff (A \vee B) \wedge (\neg A \vee \neg B)$.

7. Legyenek $x_1, x_2, \ldots, x_n$ logikai változók (igaz vagy hamis). Tekintsünk egy formulát a változók és az $\wedge$, $\vee$, $\neg$ műveletekkel. Egy formula *kielégíthető*, ha lehet úgy választani a változóit, hogy a formula igaz legyen. Például az $F(x_1, x_2) = x_1 \wedge x_2$ kielégíthető, mert ha $x_1 = x_2 = \mathit{igaz}$, akkor F igaz lesz. A $G(x_1) = x_1 \wedge \neg x_1$ viszont nem kielégíthető, mert x_1 bármilyen választása esetén G hamis lesz. Írjunk programot, mely adott n-változós formula esetén eldönti, hogy kielégíthető-e. Mi az a legnagyobb n, ahány változós formulára a program lefut használható időn belül (pl. 1 óra)?