Komplex számok

Diszkrét matematika I. – feladatsor

1. Írjuk fel algebrai alakban:
   a) $(3+2i)(2+i)$; b) $(2-5i)^2$; c) $\dfrac{1}{1+2i}$; d) $\dfrac{3+4i}{1-2i}$; e) $\dfrac{i}{(1-i)(1-2i)(1+2i)}$.
2. Mennyi $x, y \in \mathbb{R}$, ha:
   a) $(x+yi)(2-i) = x+3i$; b) $(x+i)(1+yi) = 3y+xi$; c) $(1+2i)x+(3-5i)y = 1-3i$;
   d) $\dfrac{5}{x+yi} + \dfrac{2}{1+3i} = 1$?
3. Mennyi $z \in \mathbb{C}$, ha:
   a) $\dfrac{z+i-3i\overline{z}}{z-4} = i-1$; b) $\left|\dfrac{z-3}{2-\overline{z}}\right| = 1 \ \wedge \ \operatorname{Re}\left(\dfrac{z}{2+i}\right) = 2$.
4. Legyen
   - $A = \begin{pmatrix} 2-i & 2+i \\ 2+i & 2-i \end{pmatrix}$, • $B = \begin{pmatrix} -i & 3-i \\ 3-i & 2-i \\ -1+2i & -i \end{pmatrix}$, • $C = \begin{pmatrix} -1 & -3+i & i \\ 3i & 2i & 3-4i \\ 2i & 2 & -i \end{pmatrix}$.

   Számítsuk ki (ha lehet):
   a) A^2, b) B^2, c) AB, d) BA, e) AC, f) CA, g) BC, h) CB.
5. Legyen
   - $A = \begin{pmatrix} 2-i & 2+i \\ 2+i & 2-i \end{pmatrix}$, • $D = \begin{pmatrix} -i & i \\ i & i \end{pmatrix}$.

   Számítsuk ki:
   a) $\det A$, b) $\det D$, c) $\det A^2$, d) $\det AD$, e) $\det DA$, f) $\det D^2$.
6. Ábrázoljuk komplex számsíkon az alábbi feltételnek megfelelő komplex számok halmazát:
   a) $\operatorname{Re}(z) \geq 2$; b) $\operatorname{Im}(z) \leq 1$; c) $\operatorname{Re}(z+2i) \leq 0$; d) $\operatorname{Re}(z+1) \geq \operatorname{Im}(z-2i)$;
   e) $|z| = 1$; f) $2 < |z| \leq 3$; g) $|z-1| \leq 2$; h) $|z-i-1| \leq 3$;
   i) $|z-1| < 1 \ \wedge \ \operatorname{Im}(z) > 0$; j) $|z+i| > 2 \ \wedge \ \operatorname{Re}(z) < 2$;
   k) $|z+i| = |z-3i|$; l) $|z-3+2i| = |z+4-i|$;
   m) $z = 1/\overline{z}$; n) $z+\overline{z} = 0$; o) $|z| = iz$; p) $z^3 = |z|$.
7. Írjuk fel trigonometrikus alakban:
   a) $1+i$; b) $\sqrt{3}-i$; c) $4i$; d) -3; e) $\dfrac{10}{\sqrt{3}-i}$; f) $\dfrac{2+3i}{5+i}$; g) $3-4i$; h) $-2+i$;
   i) $\dfrac{1+\sqrt{3}i}{2}$; j) $\dfrac{-1+\sqrt{3}i}{2}$; k) $\cos\dfrac{2\pi}{3} - i\sin\dfrac{2\pi}{3}$; l) $-\cos\dfrac{2\pi}{3} + i\sin\dfrac{2\pi}{3}$.

8. Számoljuk ki a trigonometrikus alak használatával:

   a) $(1+i)(-2+2i)$; b) $\dfrac{\sqrt{3}-i}{\sqrt{3}+i}$; c) $\left(-\dfrac{1}{2}+\dfrac{\sqrt{3}i}{2}\right)^5$;

   d) $\dfrac{(1+i)^9}{(1-i)^7}$; e) $\left(\dfrac{2-2i}{\sqrt{3}-i}\right)^{24}$; f) $\dfrac{\left(-1+\sqrt{3}i\right)^{15}}{(1-i)^{20}}+\dfrac{\left(-1-\sqrt{3}i\right)^{15}}{(1+i)^{20}}$.

9. Vonjunk négyzetgyököt:

   a) -4; b) $2i$; c) $-2+2\sqrt{3}i$; d) $3-4i$; e) $-7-24i$; f) $8+6i$.

10. Oldjuk meg $\mathbb{C}$ fölött:

    a) $x^3=1$; b) $x^3=i$; c) $x^3=2+2i$; d) $x^4=i$; e) $x^8=\sqrt{3}-i$; f) $x^6=1+i$.

11. Számoljuk ki:

    a) 64 hatodik gyökeit; b) $-16\sqrt{3}+16i$ ötödik gyökeit; c) $\dfrac{7+3i}{5-2i}$ negyedik gyökeit;

    d) $\dfrac{1-i}{\sqrt{3}+i}$ hatodik gyökeit; e) $\dfrac{-4}{(2+i)^3}$ negyedik gyökeit.

12. Írjuk fel a transzformációt a komplex számsík műveletével, ill. mátrixként is:

    a) origó körüli forgatás $\pi/4$-gyel; b) origó körüli forgatás $5\pi/6$-tal és 3-szoros nyújtás.

13. Nevezzük meg a transzformációt, és írjuk fel a mátrixát.

    a) $z\mapsto 3z$, b) $z\mapsto \dfrac{1+\sqrt{3}i}{2}z$, c) $z\mapsto (1+i)z$.

14. Legyen $z,w\in\mathbb{C}$ két különböző pont a komplex számsíkon. Írjuk fel:

    a) a z-t és w-t összekötő szakasz felezőpontját;

    b) a z és w által kifeszített szabályos háromszög harmadik csúcsát.

15. Oldjuk meg a Cardano-képlet segítségével (lásd pl. Wikipédia):

    a) $x^3-7x+6=0$; b) $x^3-13x-12=0$.

16. Írjunk egy háromszög mindegyik oldalára kifelé egy-egy szabályos háromszöget. Igazoljuk, hogy ezek középpontjai szabályos háromszöget alkotnak.