Kombinatorika

Diszkrét matematika I. – feladatsor

1. Hányféleképpen lehet:
   a) hat különböző színű golyót sorbarendezni;
   b) három sárga, két zöld és egy piros golyót sorbarendezni;
   c) hat különböző színű golyóból négyet kihúzni visszatevés nélkül, ha számít a sorrend;
   d) hat különböző színű golyóból négyet kihúzni visszatevés nélkül, ha nem számít a sorrend;
   e) hat különböző színű golyóból négyet kihúzni visszatevéssel, ha számít a sorrend;
   f) hat különböző színű golyóból négyet kihúzni visszatevéssel, ha nem számít a sorrend?

2. Hány nyolcjegyű szám alkotható az 1, 2, 3, 4 és 5 számjegyekből?

3. Egy futóversenyen 15-en futnak. Mindenki célba ér, és nincs holtverseny.
   a) Hányféle sorrendben érhetnek célba? b) Hányféleképpen alakulhat az első 3 hely?

4. Hányféleképpen lehet kitölteni egy ötöslottó szelvényt?

5. Egy pékségben tízféle péksüteményt árulnak. Hányféleképpen vásárolhatunk 12 süteményt?

6. Hányféleképpen helyezhetünk el 12 embert három – egy háromágyas, egy négyágyas és egy ötágyas – szobába úgy, hogy mindenkinek jusson ágy?

7. Hány olyan tízjegyű szám van, amelyben minden számjegy csak egyszer szerepel?

8. Hányféle sorrendben ülhet le 6 ember egy kör alakú asztalhoz, ha az egymásba forgatható ülésrendeket nem különböztetjük meg?

9. Hány különböző ötjegyű számot lehet felírni pontosan az alábbi számjegyekből:
   a) 1, 2, 3, 4, 5; b) 1, 1, 2, 3, 4; c) 1, 1, 2, 2, 2?

10. Tízszer feldobunk egy
    a) pénzérmét; b) dobókockát.
    Hányféle dobássorozat alakulhat ki?

11. Egy tesztben 30 kérdés van, minden kérdéshez öt lehetséges válasz, amelyek közül pontosan egyet kell megjelölni. Hányféleképpen tölthető ki a teszt?

12. Egy zsákban hat golyó van, rendre az 1, 2, 3, 4, 5 és 6 számokkal megcímkézve. Hányféleképpen húzhatunk ki négy golyót egymás után visszatevés nélkül:
    a) ; b) ha nem húzunk 6-ost; c) ha először 1-est húzunk;
    d) ha először páros számot húzunk; e) ha utolsónak páros számot húzunk?

13. Hány olyan hatjegyű szám van, amelynek:
a) minden számjegye különböző, és egyik sem 0; b) minden számjegye különböző;
c) a szomszédos számjegyei különbözőek; d) van 0 a számjegyei között;
e) pontosan egy számjegye 0?

14. Hányféleképpen helyezhetünk el tíz egyforma golyót három számozott zsákban?

15. Hány n-változós m-értékű Boole-függvény, azaz $f:\{0,1\}^n \to \{0,1\}^m$ típusú függvény van?

16. Egy robot lépked a számegyenesen, minden másodpercben egy egész számot mozdul el jobbra vagy balra. Az origóból indulva hányféleképpen juthat el egy perc alatt a $+24$-be?

17. Ötöslottón adott nyerőszámok mellett hányféleképpen lehet egy szelvénynek:
a) 0 találata; b) 1 találata; c) 2 találata; d) 3 találata; e) 4 találata; f) 5 találata?

18. Hány részhalmaza van az $\{1, 2, 3, \ldots, 20\}$ halmaznak:
a) ; b) mely 4-elemű; c) melyben az 1 benne van;
d) melyben az 1 és a 2 is benne van; e) melyben az 1 vagy a 2 benne van?

19. Egy dobókockával háromszor dobunk. Hányféle eredményt kaphatunk, amelyben van 6-os?

20. Hányféle sorrendben lehet felírni az $1, 2, \ldots, n$ számokat úgy, hogy az 1 és a 2 nem kerülnek egymás mellé?

21. Hányféle sorrendben lehet a MISSISSIPPI szó betűit leírni úgy, hogy a négy S betű ne kerüljön egymás mellé?

22. Hányféleképpen lehet eljutni egy 3×10-es négyzetrács bal alsó négyzetéből a jobb felsőbe, ha csak fel, jobbra vagy átlósan jobbra-fel léphetünk?

23. Adott két párhuzamos egyenes, az egyiken p, a másikon q darab különböző pont. Hány háromszöget lehet alkotni ezen pontokból mint csúcsokból?

24. Az 52-lapos francia kártyát négy ember között szétosztjuk, mindenkinek 13-13 lapot adunk. Hányféleképpen tehetjük ezt meg:
a) ; b) ha a négy ászból mindenkinek jut egy-egy; c) ha mind a négy ász egyvalakinél van?

25. Hányféleképpen lehet – a sorrendet is figyelembe véve – felbontani:
a) a 100-at 7 pozitív egész szám összegére; b) a 200-at 12 természetes szám összegére;
c) a 12-t 1-esek és 2-esek összegére?

26. Hányféleképpen lehet sorbarendezni n nullát és k egyest úgy, hogy két egyes ne kerüljön egymás mellé?

27. Egy zsákban 10 piros, 20 sárga és 40 zöld golyó van. Hányat kell húznunk ahhoz, hogy biztosan legyen közöttük:
a) sárga; b) három különböző színű; c) három azonos színű; d) öt azonos színű;
e) 15 azonos színű; f) két egymás után kihúzott zöld?

28. Hány olyan természetes szám van, amelyben a számjegyek szigorúan monoton növekednek?

29. Hányféleképpen lehet n százforintost k ember között szétosztani
a) ; b) ha mindenki kap legalább egy százast?

30. Hányféleképpen lehet 100 rekeszben elhelyezni 30 golyót úgy, hogy minden rekeszbe vagy nem jut golyó, vagy pontosan 6 golyó jut, és:
a) a golyókat nem különböztetjük meg;
b) megkülönböztetjük a golyókat, és a rekeszeken belül számít a sorrend;
c) megkülönböztetjük a golyókat, de nem számít a rekeszeken belüli sorrend?

31. Az $(a+b)^{22}$ kifejezésben mi az együtthatója
a) a^{22}-nek; b) $a^{21}b$-nek; c) $a^{17}b^5$-nek; d) $a^{14}b^8$-nak?

32. Hány nullára végződik $11^{100} - 1$?

33. Hányféleképpen lehet egy 2×12-es négyzetrácsot lefedni 12 darab 2×1-es dominóval?

34. 12-en ülnek egy kerekasztal körül. Mindenki haragban van a két szomszédjával. Hányféleképpen lehet 5-öt kiválasztani közülük úgy, hogy semelyik kettő se legyen haragban egymással?

35. Hányféleképpen állhat föl 10 pár egy körtánchoz, ha mindenki a saját párja mellett táncol, de a Kiss-pár nem táncol a Nagy-pár mellett?

36. Hányféleképpen lehet az egymilliót három természetes szám szorzatára bontani, ha a tényezők sorrendje a) számít, b) nem számít?

37. Legalább mekkora osztálylétszám kell ahhoz, hogy biztosan legyen:
a) négy diák, aki ugyanabban a hónapban született;
b) minden hónapban legalább három diáknak születésnapja?

38. Legfeljebb hány olyan természetes szám adható meg úgy, hogy semelyik kettő különbsége ne legyen osztható nyolccal?

39. Van egy 1 méter sugarú kör alakú céltáblánk, ahol csak a külső körvonalat célozzuk.
a) 4 nyilat lövünk a 4 lehető legtávolabbi pontra (pl. legfelső, legalsó, bal szélső, jobb szélső). Bizonyítsuk be, hogy egy ötödik nyilat már nem tudunk a céltáblára lőni úgy, hogy mind a négy nyíltól legalább 1 méter távolságra legyen.
b) Igaz-e, hogy 5 nyilat lőve biztosan lesz közöttük kettő, amelyek 1 méternél közelebb lesznek egymáshoz?

40. Egy 2×2 méteres négyzet alakú céltáblára golyókat lövöldözünk.
a) Bizonyítsuk be, hogy ha 5 golyót lövünk rá, akkor lesz közöttük kettő, amelynek távolsága legfeljebb $\sqrt{2}$ méter.
b) Hány golyót kell a céltáblára lőni ahhoz, hogy biztosan legyen legalább 6, melyek páronként legfeljebb $\sqrt{2}$ méterre vannak egymástól?

41. Egy osztály 37 tanulója közül
• 27-en tanulnak angolul, • 15-en németül, • 10-en mindkét nyelven.
Hányan vannak, akik sem angolul, sem németül nem tanulnak?

42. Egy osztály 30 tanulója közül
• 12-en szeretik a matekot; • 14-en szeretik a fizikát; • 13-an szeretik a kémiát;
• 5-en szeretik a matekot és a fizikát; • 4-en szeretik a matekot és a kémiát;
• 7-en szeretik a fizikát és a kémiát; • és 3-an szeretik mindhárom tárgyat.
Hányan vannak, akik egyik tárgyat sem szeretik?

43. a) Hány olyan 100-nál kisebb természetes szám van, amely nem osztható sem 2-vel, sem 3-mal, sem 5-tel?
b) Hány olyan 1000-nél kisebb természetes szám van, amely nem osztható sem 2-vel, sem 3-mal, sem 5-tel, sem 7-tel?

44. Ha 20-szor dobunk egy dobókockával, hányféle dobássorozatot kaphatunk, ha
a) dobunk 1-est; b) dobunk 1-est és 2-est;
c) dobunk 1-est, 2-est és 3-ast; d) mind a hat szám előfordul?

45. Van egy kétkarú mérlegünk, amellyel el tudjuk dönteni, hogy a két serpenyőjében egyenlő súly van-e, vagy melyik a nehezebb. Van továbbá 9 pénzérménk, melyek külsőre teljesen egyformák, de a súlyok különböző: az egyik hamis és könnyebb a többinél, a többi pedig egyforma súlyú. Hány mérés kell a mérlegen ahhoz, hogy megtaláljuk a hamis érmét? (Egyszerre több érmét is tehetünk egy serpenyőbe.) Adjunk módszert, és bizonyítsuk, hogy kevesebb mérés nem elég.

46. a) Hányféleképpen helyezhetünk el egy 8×8-as sakktáblán 8 bástyát úgy, hogy semelyik se üsse a másikat?
b) Hányféleképpen tehetjük ezt meg úgy, ha a forgatással vagy tükrözéssel egymásba vihető állásokat nem különböztetjük meg? (Például az $\{\mathrm{a1}, \mathrm{b2}, \mathrm{c3}, \mathrm{d4}, \mathrm{e8}, \mathrm{f7}, \mathrm{g6}, \mathrm{h5}\}$ állás elforgatottja az $\{\mathrm{a4}, \mathrm{b3}, \mathrm{c2}, \mathrm{d1}, \mathrm{e5}, \mathrm{f6}, \mathrm{g7}, \mathrm{h8}\}$, ezért ezeket nem különböztetjük meg.)