Halmazelmélet

Diszkrét matematika I. – feladatsor

1. Írjuk fel formálisan, halmazjelöléssel az alábbi halmazokat:
   a) páros számok halmaza; b) pozitív, 3-mal nem osztható egész számok halmaza;
   c) négyzetszámok halmaza; d) racionális számok halmaza; e) prímszámok halmaza;
   f) szomszédos természetes számokat tartalmazó kételemű halmazok halmaza.

2. Legyen:
   - $A = \{x \in \mathbb{Z} \mid 1 \leq x \leq 4\}$; • $B = \{0, 2, 4, 8\}$; • $C = \{\text{egyjegyű prímszámok}\}$;
   - $X = \{A, B, C\}$.

   Számítsuk ki / döntsük el, hogy igaz-e:
   a) $A \cap B$; b) $B \cup C$; c) $A \setminus C$; d) $1 \in C$; e) $3 \in A \cap B$; f) $A \subseteq B$;
   g) $\cap X$; h) $\cup X$; i) $\{2\} \subseteq A$; j) $2 \subseteq A$; k) $A \in X$; l) $A \subseteq X$; m) $2 \in \emptyset$;
   n) $A \subseteq \emptyset$; o) $\emptyset \subseteq A$; p) $A \subseteq A$; q) $A \in A$; r) $A \in \{\{A\}, B\}$; s) $A \subseteq \{\{A\}, B\}$;
   t) $\emptyset = \{\emptyset\}$; u) $B \cup \emptyset$; v) $B \cup \{\emptyset\}$.

3. Legyen:
   - $M = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2}$; • $A = \{v \in \mathbb{R}^2 \mid Mv = 0\}$;
   - $B = \{v \in \mathbb{R}^2 \mid M^2 v = 0\}$; • $C = \left\{ v \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; M^2 v = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$.

   Írjuk fel:
   a) $A \cup B$; b) $A \cap B$; c) $A \triangle B$; d) $A \cup C$; e) $A \cap C$; f) $A \triangle C$.

4. Van-e olyan A, B és C halmaz, amelyekre egyszerre teljesül:
   - $A \cap B \neq \emptyset$, • $A \cap C = \emptyset$, • $(A \cap B) \setminus C = \emptyset$?

5. Mely A, B és C halmazokra teljesül egyszerre:
   - $A \setminus B = \{1, 3, 5\}$, • $A \cup B \cup C = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, • $(A \cap C) \cup (B \cap C) = \emptyset$,
   - $(A \cap B) \setminus C = \{6\}$, • $C \setminus B = \{2, 4\}$?

6. Hozzuk egyszerűbb alakra:
   a) $\overline{A \cup \big(B \cap \big(C \cup \overline{D}\big)\big)}$; b) $\overline{\big(\overline{A \cap B} \cup C\big) \cap \overline{\overline{A}} \cup \overline{B} \cup \overline{C}}$;
   c) $\overline{\big(\overline{A} \cup B\big) \cap \big(A \cup \overline{B}\big)}$; d) $(A \cup (A \cap B) \cup (A \cap B \cap C)) \cap (A \cup B \cup C)$;
   e) $\Big(\overline{A \cap C} \cup \overline{B \cap C} \cup \overline{\overline{A} \cap \overline{B}}\Big) \cap C$; f) $(A \cup C) \cap (B \cup C) \cap (A \cup D) \cap (B \cup D)$.

7. Bizonyítsuk be tetszőleges A, B, C halmazokra:
a) $A \cup B = B \cup A$; b) $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$;
c) $A \cap B = B \cap A$; d) $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$;
e) $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$;
f) $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$;
g) $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$; h) $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$; i) $A \cup \overline{A} = X$ (ahol X az alaphalmaz);
j) $A \cap \overline{A} = \emptyset$; k) $\overline{\overline{A}} = A$.

8. Bizonyítsuk be:
a) $A \setminus B = A \cap \overline{B}$; b) $A \setminus (B \cap C) = (A \setminus B) \cup (A \setminus C)$; c) $A \setminus (B \cup C) = (A \setminus B) \setminus C$.

9. Melyek igazak minden A, B és C halmazra:
a) $(A \cup B) \cap A = (A \cap B) \cup A$; b) $A \setminus (A \cap B) = A \setminus B$; c) $(A \cup B) \setminus A = B$;
d) $(A \cup B) \setminus C = A \cup (B \setminus C)$; e) $(A \setminus B) \cap C = (A \cap C) \setminus B = (A \cap C) \setminus (B \cap C)$?

10. Bizonyítsuk be:
a) $A \cap B \subseteq C \iff A \subseteq \overline{B} \cup C$; b) $(A \cap B) \cup C = A \cap (B \cup C) \iff C \subseteq A$;
c) $(A \setminus B) \cup B = A \iff B \subseteq A$; d) $A \cup B = A \iff A \cap B = B$;
e) $A = \emptyset \iff B = A \triangle B$; f) $A \triangle B = C \iff B \triangle C = A$.

11. Legyen:
• $A = \{1, 2\}$; • $B = \{a, b, c\}$; • $C = \{2, 3, 4\}$.
Írjuk fel:
a) $A \times A$; b) $A \times B$; c) $B \times A$; d) $A \times A \times B$; e) $(A \times A) \times B$; f) $A \times (A \times B)$.

12. Legyen:
• $A = \{1, 2\}$; • $B = \{2, 3, 4\}$; • $C = \{1, 3, 5\}$.
Írjuk fel:
a) $A \triangle B$; b) $A \triangle C$; c) $(A \triangle B) \triangle C$; d) $A \triangle (B \triangle C)$.

13. Bizonyítsuk be:
a) $A \triangle \emptyset = A$; b) $A \triangle A = \emptyset$; c) $A \triangle (A \triangle B) = B$; d) $A \triangle (B \triangle C) = (A \triangle B) \triangle C$.

14. Az előző feladatból tudjuk, hogy $A \triangle (B \triangle C) = (A \triangle B) \triangle C$, azaz a szimmetrikus differencia asszociatív. Ezért a zárójeleket elhagyhatjuk, és egyszerűen azt írhatjuk, hogy $A \triangle B \triangle C$. Bizonyítsuk be, hogy $A \triangle (B \triangle C \triangle D) = (A \triangle B \triangle C) \triangle D$.

15. Írjuk fel:
a) $2^{\emptyset}$; b) $2^{\{a\}}$; c) $2^{\{a,b\}}$; d) $2^{\{a,b,c\}}$; e) $2^{2^{2^{\emptyset}}}$.

16. A természetes számokat fel tudjuk építeni tisztán halmazelmélet segítségével, a következő rekurzióval:
• $0 := \emptyset$,
• $\forall n \in \mathbb{N} : n + 1 := n \cup \{n\}$.
Írjuk fel a következő számokat az így definiált halmazos alakjukban: 1, 2, 3 és 4.