Gráfelmélet

Diszkrét matematika I. – feladatsor

1. Legyen $G = (V, E)$ gráf, ahol $V = \{A, B, C, D\}$, $E = \{\{A, B\}, \{B, C\}, \{A, C\}, \{C, D\}\}$.
   a) Rajzoljuk le a gráfot. b) Határozzuk meg a következőket: $d(A), d(B), d(C), d(D)$.
   c) Rajzoljuk le G komplementerét, $\overline{G}$-t. d) Izomorf-e G és $\overline{G}$?

2. Rajzoljuk le az összes (páronként nem izomorf) a) 3-csúcsú, b) 4-csúcsú, c) 5-csúcsú egyszerű gráfot. Hány összefüggő van közöttük?

3. Hány olyan legfeljebb 5-csúcsú gráf van, amely izomorf a komplementerével?

4. Van-e olyan egyszerű gráf, melyben a csúcsok foka rendre:
   a) $0, 2, 3, 3, 3, 3, 6$; b) $1, 3, 3, 4, 5, 6, 6$; c) $1, 2, 2, 3, 3, 4, 4$; d) $1, 2, 2, 2, 5, 5, 5$;
   e) $2, 2, 2, 2, 2, 2, 2$; f) $3, 3, 3, 2, 2, 2, 1, 1, 1$; g) $7, 7, 7, 6, 6, 6, 5, 5, 5$;
   h) $6, 6, 5, 4, 4, 3, 2, 2, 1$; i) $6, 6, 6, 6, 3, 3, 2, 2$; j) $2, 2, 3, 5, 6, 6, 6, 8, 8$?

5. Bizonyítsuk be, hogy bármely gráfban a páratlan fokszámú csúcsok száma páros.

6. Egy társaságban kézfogások történnek. Bizonyítsuk be, hogy van két ember, aki ugyanannyi emberrel fogott kezet.

7. Bizonyítsuk be, hogy ha egy összefüggő, legalább két csúcsból álló gráfnak kevesebb éle van, mint csúcsa, akkor van elsőfokú csúcsa.

8. a) Legyen G egy legfeljebb $(2n + 1)$-csúcsú egyszerű gráf, amelynek minden csúcsa legalább n-edfokú. Bizonyítsuk be, hogy G összefüggő.
   b) Mi a helyzet, ha csak annyit teszünk fel, hogy minden csúcs legalább $(n - 1)$-edfokú?

9. Hat versenyző körmérkőzést játszik. Bizonyítsuk be, hogy a verseny bármely időpontjában vagy van három olyan versenyző, akik közül mindenki játszott a másik kettővel, vagy három olyan, akik közül semelyik kettő nem játszott még egymással.

10. Bizonyítsuk be, hogy ha egy gráf két csúcsa között van séta, akkor út is van.

11. Bizonyítsuk be, hogy ha egy véges gráf minden fokszáma legalább 2, akkor a gráfban van kör.

12. Igaz-e, hogy egy gráf és komplementere közül valamelyik biztosan összefüggő?

13. Rajzoljuk le az összes (páronként nem izomorf)
    a) 3-csúcsú, b) 4-csúcsú, c) 5-csúcsú, d) 6-csúcsú fát.

14. Mely fák izomorfak a komplementerükkel?

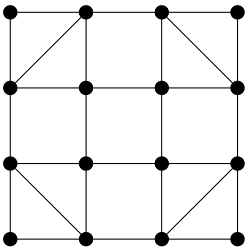
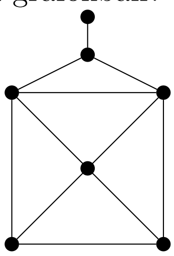
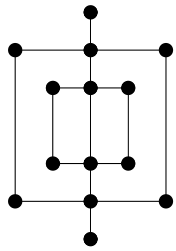
15. Bizonyítsuk be, hogy egy véges gráfban a csúcsok száma legfeljebb annyi, mint a komponensek és az élek számának összege.

16. Legyen G egy fa a V csúcshalmazzal, legyen $n := |V| \geq 2$, és $a_k := \big|\{v \in V \mid d(v) = k\}\big|$.

    a) Lehet $n = 8$ és $a_3 = 2$? Ha igen, rajzoljuk le az összes lehetőséget izomorfizmus erejéig.
    b) Bizonyítsuk be, hogy $2a_1 + a_2 \geq n + 2$.
    c) Bizonyítsuk be, hogy $a_1 \geq \sum_{k>2} a_k + 2$.

17. Bizonyítsuk be, hogy egy véges fában minden leghosszabb út egy ponton megy keresztül.

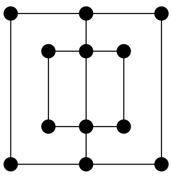
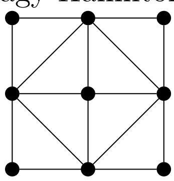
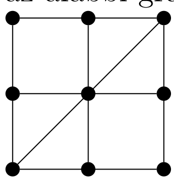
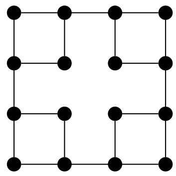
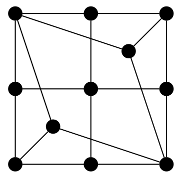
18. Van-e Euler-séta az alábbi gráfokban? És zárt Euler-séta?

a)  b)  c) 

19. Ha egy gráfnak páros sok csúcsa és páratlan sok éle van, akkor lehet benne zárt Euler-séta?

20. Bizonyítsuk be, hogy ha egy gráf minden csúcsa negyedfokú, akkor az élei kiszínezhetők pirossal és kékkel úgy, hogy minden csúcsra két piros és két kék él illeszkedjen.

21. Van-e Hamilton-út vagy Hamilton-kör az alábbi gráfokban?

a)  b)  c)  d)  e) 

22. Bejárható-e egy 9x9-es sakktábla lóugrással úgy, hogy minden mezőre egyszer lépünk, és végül visszatérünk a kiindulási mezőre?

23. Bizonyítsuk be, hogy egy gráf, amelyben van Hamilton-kör, összefüggő marad, ha:
    a) töröljük a gráf egy élét; b) töröljük a gráf egy csúcsát.

24. Tegyük fel, hogy egy gráfban van k darab csúcs, amelyet törölve több mint k komponensre esik szét a gráf. Bizonyítsuk be, hogy nincs Hamilton-kör a gráfban.

25. Tegyük fel, hogy egy véges összefüggő gráfnak van olyan köre, amelyből egy élt elhagyva a gráf egy leghosszabb útját kapjuk. Bizonyítsuk be, hogy ez a kör egy Hamilton-kör a gráfban.

26. Bizonyítsuk be, hogy egy 100-fős társaság 25 alkalommal le tud ülni egy nagy kerek asztalhoz úgy, hogy semelyik két ember nem ülhet egynél többször egymás mellett.

27. Írjunk programot, mely egy tetszőleges gráfra megmondja, hogy van-e benne
    a) Euler-séta, b) Hamilton-kör,
    és ha igen, meg is adja azt.