

1. zárthelyi dolgozat – minta

Felhasználható idő: 90 perc, használható segédeszközök: üres papír és toll. Gyorssegély, ne ezen múljon: $\cos 30^\circ = \sin 60^\circ = \sqrt{3}/2$, $\cos 45^\circ = \sin 45^\circ = \sqrt{2}/2$, $\cos 60^\circ = \cos 30^\circ = 1/2$, $180^\circ = \pi$, $i^2 = -1$.

1. feladat 6 pont

- (a) Döntse el, hogy a következő állítások igazak vagy hamisak (helyes válasz: 1 pont, nincs válasz/helytelen válasz: 0 pont). **2 pont**
- (1) Egy komplex szám abszolút értéke valós szám. **I H**
 - (2) Ha egy reláció nem szimmetrikus, akkor biztosan antiszimmetrikus. **I H**
 - (3) Egy ekvivalenciareláció esetén az ekvivalenciaosztályok uniója a reláció értelmezési tartománya. **I H**
 - (4) Ha egy függvény injektív, akkor az inverze függvény. **I H**
- (b) Határozza meg az $R = \{(x, y) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \mid 2x - 8 = y\} \subset \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ reláció értelmezési tartományát és az $R^{-1}(\{-2, -4\})$ inverz képet. **2 pont**
- (c) Konstruáljon az a, b, c, d elemek felhasználásával olyan R relációt, melyre: $D_R = \{a, d\}$, nem szimmetrikus, reflexív és $R(\{d\}) = \{d\}$. **2 pont**

2. feladat 10 pont

- (a) Igazolja, hogy az $R \subset \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$, $R = \{(x, y) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \mid x - y \text{ osztható } 5\text{-tel}\}$ reláció ekvivalenciareláció. Mik lesznek az ekvivalenciaosztályok? **5 pont**
- (b) Adjon meg olyan A, B és C halmazokat, amelyekre nem teljesül a következő összefüggés:
 $(A \cup B) \setminus C = (A \setminus C) \cup (B \setminus C)$. **2 pont**
- (c) Igazolja, hogy tetszőleges A, B és C halmazok esetén igaz a következő összefüggés:
 $(A \cap B) \setminus C = (A \setminus C) \cap (B \setminus C)$. **3 pont**

3. feladat 5 pont

Legyen $R \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}$, $R = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid 2y + 5 = -7x\}$ és $S \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}$, $S = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid 2x \geq -7y + 2\}$. Határozza meg az $S \circ R$ és $R \circ S$ kompozíciót.

4. feladat 5 pont

- (a) Döntse el a következő relációkról, hogy függvények-e. **3 pont**
- $$f_1 \subset (\mathbb{R} \setminus \{1\}) \times \mathbb{R}, f_1 = \{(x, y) \in (\mathbb{R} \setminus \{1\}) \times \mathbb{R} \mid (x - 1)y = 2\}$$
- $$f_2 \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}, f_2 = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid x^2 = y^2\}$$
- $$f_3 \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}, f_3 = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid |y - x^2| = -1 + 3y\}$$
- (b) Döntse el, hogy az $f : \mathbb{R}_0^+ \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) := 2\sqrt{x} - 13$ függvény injektív-, illetve szürjektív-e. **2 pont**

5. feladat 7 pont

A trigonometrikus alak segítségével számítsa ki z értékét trigonometrikus és algebrai alakban is, majd adja meg az összes olyan w komplex számot trigonometrikus alakban, melyekre $w^3 = z$, ahol

$$z = \frac{(1 + i)^{40}}{(-1 + \sqrt{3}i)^{12}}.$$

6. feladat 7 pont

Ábrázolja a Gauss-számsíkon a következő halmazokat:

- (a) $\{z \in \mathbb{C} \mid 3 \cdot \operatorname{Re} z + \operatorname{Im} z \geq 2 \wedge \operatorname{Im} z < 5\}$ **3 pont**
- (b) $\{z \in \mathbb{C} \mid |z - 1| \geq 4 \wedge \operatorname{Re} z > 2\}$ **4 pont**