Relációk

(tulajdonságok, ekvivalencia, rendezés)

Diszkrét matematika I. feladatsor

Gyakorlatvezető: Uray M. János

1. Legyen
   - $A = \{1, 2, 3, 4\}$, • $B = \{5, 6, 7, 8, 9\}$,
   - $R \subseteq A \times B,\ R = \{(1, 5), (1, 6), (1, 7), (3, 6), (3, 9), (4, 5), (4, 7), (4, 9)\}$.

   a) Mi R értelmezési tartománya és értékkészlete? b) Rajzoljuk fel R gráfját.
   c) Szűkítsük le R-t az $\{1, 2, 3\}$ halmazra. d) Szűkítsuk le R-t a $\{4\}$ halmazra.
   e) Határozzuk meg R^{-1}-et. f) Határozzuk meg a $R(\{1, 2\})$ képet.
   g) Határozzuk meg a $R^{-1}(\{5, 6\})$ inverz képet.

2. Legyen $R \subseteq \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ és $R = \{(a, b) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \mid a = 2b\}$.
   a) Mi R értelmezési tartománya és értékkészlete?
   b) Határozzuk meg R^{-1}-et. c) $R(\{3, 4, \dots, 10\}) = ?$
   d) Szűkítsük le R-et $\{1, 2, \dots, 6\}$-ra.

3. Az alábbi relációk közül melyik
   - reflexív, • irreflexív, • szimmetrikus, • antiszimmetrikus,
   - szigorúan antiszimmetrikus, • tranzitív, • dichotom, • trichotom:

   a) $\leq_{\mathbb{R}}$; b) $<_{\mathbb{R}}$; c) $\subseteq$; d) $\subset$; e) $R \subseteq \mathbb{Z}^+ \times \mathbb{Z}^+,\ xRy \iff x \mid y$;
   f) {síkbeli körök}-ön a ,,van közös pontja"; g) {emberek}-en az ,,ismeri";
   h) {emberek}-en a ,,rokona"; i) {emberek}-en a ,,testvére";
   j) $X = \{\text{kő}, \text{papír}, \text{olló}\},\ R = \{(\text{kő}, \text{olló}), (\text{olló}, \text{papír}), (\text{papír}, \text{kő})\}$;
   k) $X = \{a, b, c\},\ R = \{(a, b), (b, a), (b, b), (a, c)\}$?

4. Adjunk példát olyan relációra az $\{1, 2, 3, 4\}$ halmazon, amely
   a) reflexív és nem irreflexív; b) nem reflexív és nem irreflexív;
   c) antiszimmetrikus és nem szimmetrikus; d) szimmetrikus és nem antiszimmetrikus;
   e) nem szimmetrikus és nem antiszimmetrikus; f) szimmetrikus és antiszimmetrikus;
   g) reflexív és trichotóm;
   h) nem reflexív, nem tranzitív, nem szimmetrikus, nem antiszimmetrikus, nem trichotóm.

5. Mutassuk meg, hogy ekvivalenciareláció ($R \subseteq X \times X$). Milyen osztályozást határoz meg?
   a) $X = \{1, 2, 3, 4, 5\},\ R = \{(1, 1), (1, 5), (2, 2), (3, 3), (3, 4), (4, 3), (4, 4), (5, 1), (5, 5)\}$;
   b) $X = \mathbb{Z},\ aRb \iff 2 \mid (a + b)$; c) $X = \mathbb{N},\ aRb \iff 3 \mid (a^2 - b^2)$;
   d) $X = \mathbb{R},\ aRb \iff a - b \in \mathbb{Q}$; e) $X = \mathbb{Z},\ aRb \iff 5 \mid (a - b)$;
   f) $X = \mathbb{Z} \times \mathbb{Z},\ (a, b)R(c, d) \iff a + d = b + c$.
   g) $X = \mathbb{Z}^+ \times \mathbb{Z}^+,\ (a, b)R(c, d) \iff ad = bc$.

6. Döntsük el, hogy részbenrendezés, ill. teljes rendezés-e ($R \subseteq X \times X$):
   a) $X = \{a, b, c, d\}$, $R = \{(a, a), (a, b), (a, c), (a, d), (b, b), (c, b), (c, c), (d, b), (d, c), (d, d)\}$;
   b) $X = \mathbb{R}$, $aRb \iff a \leq b$; c) $X = \mathbb{R}$, $aRb \iff a < b$;
   d) $X = \mathbb{Z}^+$, $aRb \iff a \mid b$; e) $X = 2^{\mathbb{N}}$, $aRb \iff a \subseteq b$;
   f) $X = \mathbb{Z}$, $aRb \iff |a| \leq |b|$; g) $X = \mathbb{N} \times \mathbb{N}$, $(a, b)R(c, d) \iff a \leq c \wedge b \leq d$;

7. Mi az $R \cap S$ reláció, ha:
   • $R \subseteq \mathbb{N} \times \mathbb{N}$, $mRn \iff m|n$ és • $S \subseteq \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$, $mSn \iff n = m + 6$.

8. Legyen
   • $A = \{1, 2, 3\}, B = \{a, b, c, d, e, f\}, C = \{2, 4, 6, 8\}$;
   • $R \subseteq A \times B$, $R = \{(1, a), (1, b), (2, c), (2, f), (3, d), (3, e), (3, f)\}$;
   • $S \subseteq B \times C$, $S = \{(a, 2), (a, 4), (c, 6), (c, 8), (d, 2), (d, 4), (d, 6), (f, 8)\}$.
   Határozzuk meg $S \circ R$-et.

9. Számítsuk ki $S \circ R$-et és $R \circ S$-et ($R, S \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}$):
   a) $xRy \iff 4x = y^2 + 6, \quad xSy \iff x - 1 = y$;
   b) $xRy \iff x = 2y, \quad xSy \iff y = x^3$;
   c) $xRy \iff \dfrac{1}{x} = y^2, \quad xSy \iff \sqrt{x-2} = 3y$;
   d) $xRy \iff (x - 3)^2 = y, \quad xSy \iff x = y^2 \wedge 2y = -x$.

10. Határozzuk meg az értelmezési tartományát, értékkészletét, és döntsük el, hogy függvény-e:
    a) $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 3 < x < 6 \wedge x < y < 2x\}$; b) $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid |x| + |y| \leq 1\}$;
    c) $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = (x - 1)/(1 - x^2)\}$; d) $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y(1 - x^2) = x - 1\}$;
    e) $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid |x| = |y|\}$; f) $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = x - \lfloor x \rfloor\}$.

11. Melyek függvények ($f \subseteq A \times B$), és azok közül melyik:
    • injektív, • szürjektív, • bijektív:
    a) $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, $B = \{10, 11, 12\}$, $f = \{(1, 11), (2, 11), (4, 12), (5, 10)\}$;
    b) $A = \{1, 2, 3, 4\}$, $B = \{a, b, c, d, e, f\}$, $f = \{(1, a), (2, c), (3, e), (3, f), (4, a)\}$;
    c) $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, $B = \{a, b, c, d, e, f\}$, $f = \{(1, a), (4, e), (5, d)\}$;
    d) $A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{1, 3, 5\}$, $f = \{(1, 1), (2, 5), (3, 5)\}$.

12. Az alábbi függvények közül melyik
    • injektív, • szürjektív, • bijektív:
    a) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2$; b) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_0^+$, $f(x) = x^2$; c) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^3$;
    d) $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, $f(n) = n^2$; e) $f : \{a, b, c\} \to \{a, b, c\}$, $f(a) = b, f(b) = a, f(c) = c$.

13. Mutassuk meg:
    a) ha R tranzitív és irreflexív reláció, akkor szigorúan antiszimmetrikus;
    b) ha R ekvivalenciareláció, akkor R^{-1} is az; c) ha R részbenrendezés, akkor R^{-1} is az;
    d) ha R tranzitív reláció, akkor $R \circ R$ is az; e) ha R reláció, akkor $R^{-1} \circ R$ szimmetrikus;
    f) ha R tranzitív és reflexív reláció, akkor $R = R \circ R$;
    g) ha f és g injektív, akkor $f \circ g$ is injektív; h) ha f és g szürjektív, akkor $f \circ g$ is szürjektív;
    i) ha f és g bijektív, akkor $f \circ g$ is bijektív.