Komplex számok

Diszkrét matematika I. feladatsor

Gyakorlatvezető: Uray M. János

1. Írjuk fel algebrai alakban:
   a) $(3+2i)(2+i)$; b) $(2-5i)^2$; c) $\dfrac{1}{1+2i}$; d) $\dfrac{3+4i}{1-2i}$; e) $\dfrac{i}{(1-i)(1-2i)(1+2i)}$.

2. Mennyi $x, y \in \mathbb{R}$, ha:
   a) $(x+yi)(2-i) = x+3i$; b) $(x+i)(1+yi) = 3y+xi$; c) $(1+2i)x+(3-5i)y = 1-3i$;
   d) $\dfrac{5}{x+yi} + \dfrac{2}{1+3i} = 1$?

3. Mennyi $z \in \mathbb{C}$, ha:
   a) $\dfrac{z+i-3i\overline{z}}{z-4} = i-1$; b) $\left|\dfrac{z-3}{2-\overline{z}}\right| = 1 \wedge \operatorname{Re}\left(\dfrac{z}{2+i}\right) = 2$.

4. Ábrázoljuk komplex számsíkon az alábbi feltételnek megfelelő komplex számok halmazát:
   a) $\Re(z) \geq 2$; b) $\Im(z) \leq 1$; c) $\Re(z+2i) \leq 0$; d) $\Re(z+1) \geq \Im(z-2i)$;
   e) $|z| = 1$; f) $2 < |z| \leq 3$; g) $|z-1| \leq 2$; h) $|z-i-1| \leq 3$;
   i) $|z-1| < 1 \wedge \Im(z) > 0$; j) $|z+i| > 2 \wedge \Re(z) < 2$;
   k) $|z+i| = |z-3i|$; l) $|z-3+2i| = |z+4-i|$;
   m) $z = 1/\overline{z}$; n) $z+\overline{z} = 0$; o) $|z| = iz$; p) $z^3 = |z|$.

5. Írjuk fel trigonometrikus alakban:
   a) $1+i$; b) $\sqrt{3}-i$; c) $4i$; d) -3; e) $\dfrac{10}{\sqrt{3}-i}$; f) $\dfrac{2+3i}{5+i}$; g) $3-4i$; h) $-2+i$;
   i) $\dfrac{1+\sqrt{3}i}{2}$; j) $\dfrac{-1+\sqrt{3}i}{2}$; k) $\cos\dfrac{2\pi}{3} - i\sin\dfrac{2\pi}{3}$; l) $-\cos\dfrac{2\pi}{3} + i\sin\dfrac{2\pi}{3}$.

6. Számoljuk ki a trigonometrikus alak használatával:
   a) $(1+i)(-2+2i)$; b) $\dfrac{\sqrt{3}-i}{\sqrt{3}+i}$; c) $\left(-\dfrac{1}{2}+\dfrac{\sqrt{3}i}{2}\right)^5$;
   d) $\dfrac{(1+i)^9}{(1-i)^7}$; e) $\left(\dfrac{2-2i}{\sqrt{3}-i}\right)^{24}$; f) $\dfrac{\left(-1+\sqrt{3}i\right)^{15}}{(1-i)^{20}} + \dfrac{\left(-1-\sqrt{3}i\right)^{15}}{(1+i)^{20}}$.

7. Vonjunk négyzetgyököt:
   a) -4; b) $2i$; c) $-2+2\sqrt{3}i$; d) $3-4i$; e) $-7-24i$; f) $8+6i$.

8. Oldjuk meg $\mathbb{C}$ fölött:
   a) $x^3 = 1$; b) $x^3 = i$; c) $x^3 = 2+2i$; d) $x^4 = i$; e) $x^8 = \sqrt{3}-i$; f) $x^6 = 1+i$.

9. Számoljuk ki:

a) 64 hatodik gyökeit; b) $-16\sqrt{3}+16i$ ötödik gyökeit; c) $\dfrac{7+3i}{5-2i}$ negyedik gyökeit;

d) $\dfrac{1-i}{\sqrt{3}+i}$ hatodik gyökeit; e) $\dfrac{-4}{(2+i)^3}$ negyedik gyökeit.

10. Melyek:

a) a primitív harmadik egységgyökök; b) a primitív negyedik egységgyökök;

c) a primitív második egységgyökök; d) a primitív első egységgyökök;

e) a primitív hatodik egységgyökök; f) a primitív nyolcadik egységgyökök?

11. Melyek egységgyökök, mennyi ezek rendje, milyen n-re lesznek n-edik egységgyökök, ill. primitív n-edik egységgyökök:

a) 1; b) -1; c) i; d) $1+i$; e) $\dfrac{1+i}{\sqrt{2}}$; f) $\dfrac{1+\sqrt{3}i}{2}$; g) $\dfrac{-1+\sqrt{3}i}{2}$;

h) $\cos\left(\dfrac{\pi}{361}\right)+i\sin\left(\dfrac{\pi}{361}\right)$; i) $\cos\left(\sqrt{2}\pi\right)+i\sin\left(\sqrt{2}\pi\right)$?

12. Legyen $\varepsilon \in \mathbb{C}$.

a) Bizonyítsuk be, hogy ha $\varepsilon^4 = i$, akkor $4 \mid o(\varepsilon)$.

b) Ha $o(\varepsilon) = 128$, akkor mennyi lehet $o(i\varepsilon)$?

13. Legyen ε primitív n-edik egységgyök. Bizonyítsuk be:

a) hogy ε hatványai pontosan az n-edik egységgyökök lesznek;

b) hogy ε pontosan akkor k-adik egységgyök, ha $n \mid k$.