Kombinatorika

Diszkrét matematika I. feladatsor

Gyakorlatvezető: Uray M. János

1. Hányféleképpen lehet:
   a) hat különböző színű golyót sorbarendezni;
   b) három sárga, két zöld és egy piros golyót sorbarendezni;
   c) hat különböző színű golyóból négyet kihúzni visszatevés nélkül, ha számít a sorrend;
   d) hat különböző színű golyóból négyet kihúzni visszatevés nélkül, ha nem számít a sorrend;
   e) hat különböző színű golyóból négyet kihúzni visszatevéssel, ha számít a sorrend;
   f) hat különböző színű golyóból négyet kihúzni visszatevéssel, ha nem számít a sorrend?

2. Hány olyan nyolcjegyű szám van, amelynek a számjegyei csak 1, 2, 3, 4 és 5 lehetnek?

3. Egy futóversenyen 15-en futnak. Mindenki célba ér, és nincs holtverseny.
   a) Hányféle sorrendben érhetnek célba? b) Hányféleképpen alakulhat az első 3 hely?

4. Hányféleképpen lehet kitölteni egy ötöslottó szelvényt?

5. Egy pékségben tízféle péksüteményt árulnak. Hányféleképpen vásárolhatunk 12 süteményt?

6. Hányféleképpen helyezhetünk el 12 embert három – egy háromágyas, egy négyágyas és egy ötágyas – szobában úgy, hogy mindenkinek jusson ágy?

7. Hány olyan tízjegyű szám van, amelyben minden számjegy csak egyszer szerepel?

8. Hányféle sorrendben ülhet le 6 ember egy kör alakú asztalhoz, ha az egymásba forgatható ülésrendeket nem különböztetjük meg?

9. Hány különböző ötjegyű számot lehet felírni az alábbi számjegyekből?
   a) 1, 2, 3, 4, 5; b) 1, 1, 2, 3, 4; c) 1, 1, 2, 2, 2;

10. Tízszer feldobunk egy
    a) pénzérmét; b) dobókockát.
    Hányféle dobássorozat alakulhat ki?

11. Egy tesztben 30 kérdés van, minden kérdéshez öt lehetséges válasz, amelyek közül pontosan egyet kell megjelölni. Hányféleképpen tölthető ki a teszt?

12. Egy robot lépked a számegyenesen, minden másodpercben egy egész számot mozdul el jobbra vagy balra. Az origóból indulva hányféleképpen juthat el egy perc alatt a +24-be?

13. Egy zsákban hat golyó van, rendre az 1, 2, 3, 4, 5 és 6 számokkal megcímkézve. Hányféleképpen húzhatunk ki négy golyót egymás után visszatevés nélkül:
    a) ; b) ha nem húzunk 6-ost; c) ha először 1-est húzunk;
    d) ha először páros számot húzunk; e) ha utolsónak páros számot húzunk?

14. Hány olyan hatjegyű szám van, amelynek:
    a) minden számjegye különböző, és egyik sem 0; b) minden számjegye különböző;
    c) a szomszédos számjegyei különbözőek; d) van 0 a számjegyei között;
    e) pontosan egy számjegye 0?

15. Hány n-változós m-értékű Boole-függvény, azaz $f : \{0, 1\}^n \to \{0, 1\}^m$ típusú függvény van?

16. Hányféleképpen helyezhetünk el tíz egyforma golyót három számozott zsákban?

17. Ötöslottón adott nyerőszámok mellett hányféleképpen lehet egy szelvénynek:
    a) 0 találata; b) 1 találata; c) 2 találata; d) 3 találata; e) 4 találata; f) 5 találata?

18. Hány részhalmaza van az $\{1, 2, 3, \ldots, 20\}$ halmaznak:
    a) ; b) melyben az 1 benne van; c) melyben az 1 és a 2 is benne van;
    d) melyben az 1 vagy a 2 benne van?

19. Hányféle sorrendben lehet felírni az $1, 2, \ldots, n$ számokat úgy, hogy az 1 és a 2 nem kerülnek egymás mellé?

20. Hányféle sorrendben lehet a MISSISSIPPI szó betűit leírni úgy, hogy a négy S betű ne kerüljön egymás mellé?

21. Az $(a + b)^{22}$ kifejezésben mi az együtthatója
    a) $a^{14}b^8$-nak; b) $a^{17}b^5$-nek?

22. Hányféleképpen lehet eljutni egy 3×10-es négyzetrács bal alsó négyzetéből a jobb felsőbe, ha csak fel, jobbra vagy átlósan jobbra-fel léphetünk?

23. Adott két párhuzamos egyenes, az egyiken p, a másikon q darab különböző pont. Hány háromszöget lehet alkotni ezen pontokból mint csúcsokból?

24. Hány nullára végződik $11^{100} - 1$?

25. Hányféleképpen lehet – a sorrendet is figyelembe véve – felbontani:
    a) a 100-at 7 pozitív egész szám összegére; b) a 200-at 12 természetes szám összegére;
    c) a 12-t 1-esek és 2-esek összegére?

26. Hányféleképpen lehet egy 2×12-es négyzetrácsot lefedni 12 darab 2×1-es dominóval?

27. Az 52 lapos francia kártyát négy ember között szétosztjuk, mindenkinek 13-13 lapot adunk. Hányféleképpen tehetjük ezt meg:
    a) ; b) ha a négy ászból mindenkinek jut egy-egy; c) ha mind a négy ász egyvalakinél van?

28. Hányféleképpen lehet sorbarendezni n nullát és k egyest úgy, hogy két egyes ne kerüljön egymás mellé?

29. Egy zsákban 10 piros, 20 sárga és 40 zöld golyó van. Hányat kell húznunk ahhoz, hogy biztosan legyen közöttük:
a) sárga; b) három különböző színű; c) három azonos színű; d) öt azonos színű;
e) 15 azonos színű; f) két egymás után kihúzott zöld?

30. Legalább mekkora osztálylétszám kell ahhoz, hogy biztosan legyen:
a) négy diák, aki ugyanabban a hónapban született;
b) minden hónapban legalább három diáknak születésnapja?

31. Egy osztály 30 tanulója közül
• 12-en szeretik a matekot; • 14-en szeretik a fizikát; • 13-an szeretik a kémiát;
• 5-en szeretik a matekot és a fizikát; • 4-en szeretik a matekot és a kémiát;
• 7-en szeretik a fizikát és a kémiát; • és 3-an szeretik mindhárom tárgyat.
Hányan vannak, akik egyik tárgyat sem szeretik?

32. a) Hány olyan 100-nál kisebb természetes szám van, amely nem osztható sem 2-vel, sem 3-mal, sem 5-tel?
b) Hány olyan 1000-nél kisebb természetes szám van, amely nem osztható sem 2-vel, sem 3-mal, sem 5-tel, sem 7-tel?

33. Hányféleképpen lehet 100 rekeszben elhelyezni 30 golyót úgy, hogy minden rekeszbe vagy nem jut golyó, vagy pontosan 6 golyó jut, és:
a) a golyókat nem különböztetjük meg;
b) megkülönböztetjük a golyókat, de nem számít a rekeszeken belüli sorrend;
c) megkülönböztetjük a golyókat, és a rekeszeken belül számít a sorrend is?

34. Legfeljebb hány olyan természetes szám adható meg, hogy semelyik kettő különbsége ne legyen osztható nyolccal?