Logika, halmazelmélet

Diszkrét matematika I. feladatsor

Gyakorlatvezető: Uray M. János

1. x és y emberre legyen:
   • $N(x)$: x nő; • $F(x)$: x férfi; • $G(x,y)$: x gyereke y-nak; • $H(x,y)$: x házastársa y-nak.
   Formalizáljuk, hogy x az y-nak a:
   a) fia; b) anyja; c) férje; d) unokája; e) nagyapja; f) anyai nagyanyja; g) anyósa;
   h) testvére; i) féltestvére;

2. Formalizáljuk az alábbiakat az előző feladat predikátumaival, kiegészítve szükség szerint újakkal:
   a) Minden apa idősebb a gyermekénél. b) Egyes anyák alacsonyabbak a gyermeküknél.
   c) Ha a szülők nem okosak, attól még a gyerekük lehet okos.
   d) Csak férfi és nő házasodhat össze. e) Egy embernek nem lehet több házastársa.
   f) Mindenki vagy nő, vagy férfi, de senki sem mindkettő egyszerre.

3. Írjuk fel formálisan, halmazjelöléssel az alábbi halmazokat:
   a) páros számok halmaza; b) pozitív, 3-mal nem osztható egész számok halmaza;
   c) négyzetszámok halmaza; d) racionális számok halmaza; e) prímszámok halmaza;
   f) szomszédos természetes számokat tartalmazó kételemű halmazok halmaza.

4. Legyen:
   • $A = \{x \in \mathbb{Z} \mid 1 \leq x \leq 4\}$; • $B = \{0, 2, 4, 8\}$; • $C = \{\text{egyjegyű prímszámok}\}$.
   Számítsuk ki, ill. dönstük el, hogy igaz-e:
   a) $A \cap B$; b) $B \cup C$; c) $A \setminus C$; d) $1 \in C$; e) $3 \in A \cap B$; f) $A \subseteq B$; g) $\cap\{A, B, C\}$;
   h) $\{2\} \subseteq A$; i) $2 \subseteq A$; j) $A \in \{A, B, C\}$; k) $A \subseteq \{A, B, C\}$; l) $2 \in \emptyset$;
   m) $A \subseteq \emptyset$; n) $\emptyset \subseteq A$; o) $A \subseteq A$; p) $A \in A$; q) $A \in \{\{A\}, B\}$; r) $A \subseteq \{\{A\}, B\}$;
   s) $\emptyset = \{\emptyset\}$; t) $B \cup \emptyset$; u) $B \cup \{\emptyset\}$.

5. Van-e olyan A, B és C halmaz, amelyre egyszerre teljesül:
   • $A \cap B \neq \emptyset$; • $A \cap C = \emptyset$; • $(A \cap B) \setminus C = \emptyset$?

6. Mi A, B és C, ha tudjuk, hogy:
   • $A \setminus B = \{1, 3, 5\}$; • $A \cup B \cup C = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$; • $(A \cap C) \cup (B \cap C) = \emptyset$;
   • $(A \cap B) \setminus C = \{6\}$; • $C \setminus B = \{2, 4\}$?

7. Bizonyítsuk be tetszőleges A, B, C halmazokra:
   a) $A \cup B = B \cup A$; b) $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$;
   c) $A \cap B = B \cap A$; d) $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$;
   e) $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$;
   f) $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$;

g) $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$; h) $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$; i) $A \cup \overline{A} = X$ (ahol X az alaphalmaz);
j) $A \cap \overline{A} = \emptyset$; k) $\overline{\overline{A}} = A$.

8. Bizonyítsuk be:
a) $A \setminus (B \cap C) = (A \setminus B) \cup (A \setminus C)$; b) $A \setminus (B \cup C) = (A \setminus B) \setminus C$.

9. Melyek igazak minden A, B és C halmazra:
a) $(A \cup B) \cap A = (A \cap B) \cup A$; b) $A \setminus (A \cap B) = A \setminus B$; c) $(A \cup B) \setminus A = B$;
d) $(A \cup B) \setminus C = A \cup (B \setminus C)$; e) $(A \setminus B) \cap C = (A \cap C) \setminus B = (A \cap C) \setminus (B \cap C)$?

10. Bizonyítsuk be:
a) $A \cap B \subseteq C \Leftrightarrow A \subseteq \overline{B} \cup C$; b) $(A \cap B) \cup C = A \cap (B \cup C) \Leftrightarrow C \subseteq A$;
c) $(A \setminus B) \cup B = A \Leftrightarrow B \subseteq A$; d) $A \cup B = A \Leftrightarrow A \cap B = B$;
e) $A = \emptyset \Leftrightarrow B = A \triangle B$; f) $A \triangle B = C \Leftrightarrow B \triangle C = A$.

11. Legyen
- $A = \{1, 2\}$; • $B = \{a, b, c\}$; • $C = \{2, 3, 4\}$.

Írjuk fel:
a) $A \times A$; b) $A \times B$; c) $B \times A$; d) $A \times A \times B$; e) $(A \times A) \times B$; f) $A \times (A \times B)$;
g) $A \triangle C$; h) $A \triangle B$.

12. Bizonyítsuk be:
a) $A \triangle \emptyset = A$; b) $A \triangle A = \emptyset$; c) $A \triangle (A \triangle B) = B$; d) $A \triangle (B \triangle C) = (A \triangle B) \triangle C$.

13. Írjuk fel:
a) $2^{\emptyset}$; b) $2^{\{a\}}$; c) $2^{\{a,b\}}$; d) $2^{\{a,b,c\}}$; e) $2^{2^{2^{\emptyset}}}$.