Gráfelmélet

Diszkrét matematika I. feladatsor

Gyakorlatvezető: Uray M. János

1. Tekintsük a következő gráfot: $G = (V, E, \varphi)$, $V = \{A, B, C, D\}$, $E = \{e_1, e_2, e_3, e_4\}$, $\varphi = \{(e_1, \{A, B\}), (e_2, \{B, C\}), (e_3, \{A, C\}), (e_4, \{C, D\})\}$.
   a) Rajzoljuk le a gráfot. b) Határozzuk meg a következőket: $d(A), d(B), d(C), d(D)$.
   c) Rajzoljuk le $\overline{G}$-t. d) Izomorf G és $\overline{G}$?

2. Rajzoljuk le az összes (páronként nem izomorf)
   a) 3-csúcsú, b) 4-csúcsú, c) 5-csúcsú
   egyszerű gráfot. Hány összefüggő, illetve reguláris van közöttük?

3. Hány olyan legfeljebb 5-csúcsú gráf van, amely izomorf a komplementerével?

4. Bizonyítsuk be, hogy egy gráfban a páratlan fokszámú csúcsok száma mindig páros.

5. Van-e olyan 9-csúcsú (nem feltétlenül egyszerű) gráf, melyben a csúcsok foka rendre:
   a) $7, 7, 7, 6, 6, 6, 5, 5, 5$; b) $6, 6, 5, 4, 4, 3, 2, 2, 1$?

6. Van-e olyan *egyszerű* gráf, melyben a csúcsok foka rendre:
   a) $1, 3, 3, 4, 5, 6, 6$; b) $6, 6, 6, 6, 3, 3, 2, 2$; c) $3, 3, 3, 2, 2, 2, 1, 1, 1$;
   d) $7, 7, 7, 6, 6, 6, 5, 5, 5$; e) $2, 2, 3, 5, 6, 6, 6, 8, 8$; f) $6, 6, 5, 4, 4, 3, 2, 2, 1$?

7. Egy társaságban kézfogások történnek. Bizonyítsuk be, hogy van két ember, aki ugyanannyi emberrel fogott kezet.

8. Bizonyítsuk be, hogy ha egy összefüggő, legalább két csúcsból álló gráfnak kevesebb éle van, mint csúcsa, akkor van elsőfokú csúcsa.

9. a) Bizonyítsuk be, hogy ha egy legfeljebb $(2n + 1)$-csúcsú gráfban minden csúcs legalább n-edfokú, akkor a gráf összefüggő.
   b) Mi a helyzet, ha csak annyit teszünk fel, hogy minden csúcs legalább $(n - 1)$-edfokú?

10. a) Hat versenyző körmérkőzést játszik. Bizonyítsuk be, hogy a verseny bármely időpontjában létezik három-három olyan versenyző, akik közül mindenki játszott a másik kettővel, vagy három olyan, akik közül semelyik kettő nem játszott még egymással.
    b) Mi a helyzet öt indulónál?

11. a) Mutassuk meg, hogy ha egy gráf két csúcsa között van séta, akkor út is van.
    b) Mutassuk meg, hogy ha egy gráfban vezet út A-ból B-be, és B-ből C-be, akkor vezet út A-ból C-be is.

12. Bizonyítsuk be, hogy ha egy véges gráf minden csúcsa legalább másodfokú, akkor a gráfban van kör.

13. Ha egy egyszerű véges gráf nem összefüggő, akkor mit mondhatunk a komplementerének összefüggőségéről?

14. Rajzoljuk le az összes (páronként nem izomorf)
a) 3-csúcsú, b) 4-csúcsú, c) 5-csúcsú, d) 6-csúcsú fát.

15. Mely fák izomorfak a komplementerükkel?

16. Létezik-e erdő a következő fokszámsorozattal: $1, 1, 1, 2, 3, 3, 4, 4, 5, 6$?

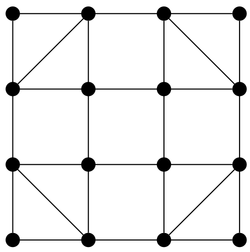
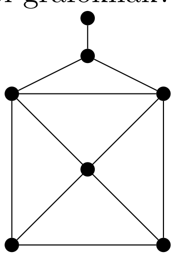
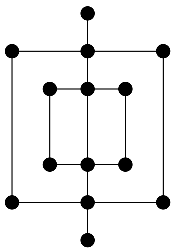
17. Bizonyítsuk be, hogy egy véges gráfban a csúcsok száma legfeljebb annyi, mint a komponensek és az élek számának összege.

18. Legyen G egy fa a V csúcshalmazzal, legyen $n := |V|$ $(n \geq 2)$, és $a_k := \big|\{v \in V \mid d(v) = k\}\big|$.
    a) Lehet $n = 8$ és $a_3 = 2$? Ha igen, rajzoljuk le az összes lehetőséget izomorfizmus erejéig.
    b) Bizonyítsuk be, hogy $2a_1 + a_2 \geq n + 2$.
    c) Bizonyítsuk be, hogy $3a_1 + 2a_2 + a_3 \geq 2n + 2$.
    d) Bizonyítsuk be, hogy $a_1 \geq \sum_{k>2} a_k + 2$.

19. Bizonyítsuk be, hogy egy összefüggő véges gráfban bármely két leghosszabb útnak van közös pontja.

20. Bizonyítsuk be, hogy egy véges fában minden leghosszabb út egy ponton megy keresztül.

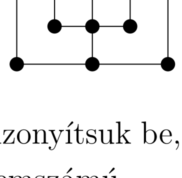
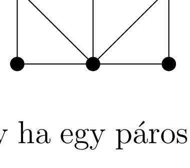
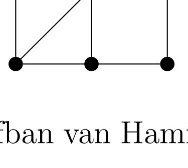
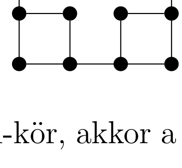
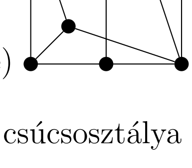
21. Van Euler-vonala az alábbi gráfoknak?

a)  b)  c) 

22. Ha egy gráfnak páros csúcsa és páratlan számú éle van, akkor lehet benne zárt Euler-vonal?

23. Bizonyítsuk be, hogy egy 4-reguláris gráf élei kiszínezhetők pirossal és kékkel úgy, hogy minden csúcsra két piros és két kék él illeszkedjen.

24. Van Hamilton-út vagy Hamilton-kör az alábbi gráfokban?

a)  b)  c)  d)  e) 

25. Bizonyítsuk be, hogy ha egy páros gráfban van Hamilton-kör, akkor a két csúcsosztálya azonos elemszámú.

26. Bizonyítsuk be, hogy egy 9x9-es sakktábla nem járható be huszárlépéssel úgy, hogy minden mezőt egyszer járunk be, és végül visszatérünk a kiindulási mezőre.

27. Bizonyítsuk be, hogy egy gráf, amelyben van Hamilton-kör, összefüggő marad, ha:
a) töröljük a gráf egy élét; b) töröljük a gráf egy csúcsát.

28. Tegyük fel, hogy egy gráfban van k darab csúcs, amelyet törölve több mint k komponensre esik szét a gráf. Bizonyítsuk be, hogy nincs Hamilton-kör a gráfban.

29. Bizonyítsuk be, hogy minden $n \geq 5$-re létezik olyan n-csúcsú gráf, hogy:
a) a gráf és a komplementere is tartalmaz Hamilton-kört;
b) sem a gráf, sem a komplementere nem tartalmaz Hamilton-kört.

30. Bizonyítsuk be, hogy egy 100 fős társaság 25 alkalommal le tud ülni egy nagy kerek asztalhoz úgy, hogy semelyik két ember nem ülhet egynél többször egymás mellett.

31. Bizonyítsuk be, hogy egy (0-tól 6-ig számozott) dominócsomagból kirakható kör.

32. Bizonyítsuk be, hogy a Petersen-gráfban nincs Hamilton-kör, de bármely csúcsát elhagyva a maradékban van.