Bevezető feladatok II.

(Alap programozás Sage-ben)

Diszkrét modellek alkalmazásai feladatsor

Gyakorlatvezető: Uray M. János

1. Adjuk össze 1-től 100-ig a számokat (legalább háromféleképpen).

2. Írjuk ki 1-től 100-ig az összes prímszámot (legalább háromféleképpen).

3. Írjuk ki az első 100 prímszámot (legalább háromféleképpen).

4. Hány prímszám van 1 000 000-ig? (Legalább háromféleképpen számítsuk ki).

5. Hozzunk létre egy listát, melynek elemei:
   a) az első 20 faktoriális: $[1, 2, 6, 24, ...]$;
   b) a Pascal-háromszög 10. sora;
   c) az 1000 alatti ikerprímpárok (azaz $(p, p+2)$ prímpárok): $[(3, 5), (5, 7), (11, 13), \ldots]$;
   d) 10 lista, ahol az n. lista a Pascal-háromszög n. sora: $[[1], [1, 1], [1, 2, 1], \ldots]$;
   e) a szögek szinusza $0°$-tól $360°$-ig $30°$-onként;
   f) az x-hatványok 100-ig $[1, x, x^2, x^3, \ldots, x^{100}]$;
   g) $\sin(2x)$ és az első 20 deriváltja (mi a szabály?).

6. Hozzunk létre a következő mátrixokat:
   a) szorzótábla (azaz $a_{ij} = i \cdot j$);
   b) Pascal-háromszög első 16 sora (0-kkal kiegészítve négyzet alakúra);
   c) prímszámok szorzótáblája (azaz a_{ij} az i. prímszám és a j. prímszám szorzata).

7. a) Írjunk egy függvényt, amely adott n-re kiszámítja az $1 + x + x^2 + x^3 + \ldots + x^{n-1}$ polinomot.
   b) Hívjuk meg $n = 100$-ra, és szorozzuk meg $(x - 1)$-gyel (és egyszerűsítsük). Mit kapunk? Miért?
   c) Írassuk ki $n = 1$-től 20-ig a polinomok szorzattá bontott alakját. Mi a kapcsolat az n. polinom felbonthatósága és az n szám tulajdonságai között? Fogalmazzuk meg a sejtést.
   d) Írjuk ki a `cyclotomic_polynomial(n)` beépített függvény értékeit $n = 1$-től 20-ig. Mi a köze a fentiekhez? Olvassunk utána! (Magyarul: körosztási polinom.)
   e) Mennyi az $n + 1$-edik polinom n-edik deriváltja? Mi a szabály? Miért?

8. a) Írjunk függvényt, amely adott n-re kiírja az n-edik komplex egységgyököket.
   b) Írassuk ki az eredményt $n = 1$-től 12-ig.
   c) Van valami köze ennek az előző feladathoz?
   d) Írjunk egy másik függvényt, amely csak a primitív egységgyököket írja ki. (Minek a gyökei ezek?)

9. Keressünk olyan egész b-t, amelyre az $x^3+bx^2+12x-8=0$ egyenletnek pontosan egy megoldása van.

10. Keressünk olyan 1 főegyütthatós egész együtthatós másodfokú egyenletet ($x^2+bx+c=0$, ahol $b, c \in \mathbb{Z}$), amelyet az aranymetszés arányszáma $\left(\phi = \dfrac{\sqrt{5}+1}{2}\right)$ kielégít.

11. Számítsuk ki az alábbi sorozat első 20 értékét numerikusan:
   - $1+1$;
   - $1+\dfrac{1}{1+1}$;
   - $1+\dfrac{1}{1+\frac{1}{1+1}}$;
   - $1+\dfrac{1}{1+\frac{1}{1+\frac{1}{1+1}}}$;
   - $\ldots$.

   Mihez közelít az érték?

12. Számítsuk ki az alábbi részletösszegeket numerikusan $n = 1$-től 20-ig.

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} = \frac{1}{1} + \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3!} + \ldots + \frac{1}{n!}$$

   Mihez közelít az érték? Számoljuk ki az összeget szimbolikusan ∞-ig.

13. Írjunk egy függvényt, amely kiszámítja a Vandermonde-mátrixot egy bemenő vektorra, azaz pl. az (a_1, a_2, a_3, a_4) vektorra a következő mátrixot:

$$\begin{pmatrix} 1 & a_1 & a_1^2 & a_1^3 \\ 1 & a_2 & a_2^2 & a_2^3 \\ 1 & a_3 & a_3^2 & a_3^3 \\ 1 & a_4 & a_4^2 & a_4^3 \end{pmatrix}$$

   Hívjuk meg a függvényt a szimbolikus változókból álló (a, b, c, d, e) vektorral, számítsuk ki a mátrix determinánsát, és bontsuk szorzattá az eredményt. Próbáljuk ki különböző méretű vektorokra. Milyen szabályosság figyelhető meg?