Bevezető feladatok I.

(Matekpéldák Sage-ben)

Diszkrét modellek alkalmazásai feladatsor

Gyakorlatvezető: Uray M. János

1. Számítsuk ki numerikusan:
   a) $3+\dfrac{1}{7}$; b) $3+\dfrac{1}{7+\frac{1}{15}}$; c) $3+\dfrac{1}{7+\frac{1}{15+\frac{1}{1}}}$. d) $3+\dfrac{1}{7+\frac{1}{15+\frac{1}{1+\frac{1}{292}}}}$.

2. Számítsuk ki:
   a) 2^{100}; b) $2^{2^{10}}$; c) $\left(2^2\right)^{10}$; d) $2^{\left(2^{10}\right)}$; e) $2^{2^{2^2}}$; f) $2^{2^{2^{2^2}}}$; g) $2^{\left(2^{2^2}\right)^2}$;
   h) $1024!$; i) $(5!)!$; j) $((3!)!)!$; k) $((((2!)!)!)!)!$; l) $\dbinom{100}{10}$; m) $\dbinom{\binom{10}{3}}{\binom{10}{2}}$.

3. Számítsuk ki:
$$\sqrt{\frac{\left(\operatorname{tg}\left(-\frac{7}{12}\pi\right)-2\right)^2}{\frac{123456}{\left(\frac{1}{2}\right)^{-13}+9!-8\cdot 88}-2^{\binom{42}{5}-(2^8+1)\cdot 3310}}}$$

4. Számítsuk ki:
   a) $\sqrt{-64}$; b) $\dfrac{4+3i}{(2-i)^2}$; c) $\dfrac{(1+\sqrt{3}i)^{18}}{(\sqrt{2}-\sqrt{2}i)^{15}}$; d) $\dfrac{\overline{1-i}}{(2+i)^2}-\dfrac{1}{3-i}$.

5. Határozzuk meg a $\left(2x^2+\dfrac{3}{x}\right)^{10}$ kifejtésében az x^{11} tag együtthatóját.

6. Hozzuk egyszerűbb alakra:
$$\left(\frac{1-\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}}+\frac{1+\sqrt{x}}{1-\sqrt{x}}\right)\cdot\frac{1-x^2}{x^2+2x+1}$$

7. Oldjuk meg:
   a) $x^2-3x+2=0$; b) $x^2-x-1=0$; c) $x^2-6x+13=0$; d) $x^2+x+1=0$;
   e) $x^3-10x^2+34x=0$; f) $x^{12}=1$; g) $x^3=-64$;
   h) $x^7+3x^6-10x^5-18x^4+29x^3-9x^2+40x+12=0$;
   i) $x^7+3x^6-10x^5-18x^4+28x^3-9x^2+40x+12=0$.

8. Oldjuk meg paraméteresen (x az ismeretlen):
   a) $\dfrac{x}{a}+\dfrac{x}{b}=1$; b) $ax+b=c$; c) $ax^2+(2-a^2)x-2a=0$.

9. Írjuk fel az általános
   a) másodfokú egyenlet; b) harmadfokú egyenlet; c) negyedfokú egyenlet
   megoldóképletét.

10. Oldjuk meg:

a) $\begin{cases} 2x + 3y - z &= 5 \\ 3x - 2y + z &= 2 \\ x + y - z &= 0; \end{cases}$ b) $\begin{cases} 4x + y + 5z &= 5 \\ 3x + 2y + 2z + w &= 4 \\ 2x + 3y - z + 2w &= 3. \end{cases}$

11. Írjuk fel általánosan a kétváltozós lineáris egyenletrendszerek megoldását.

12. Számítsuk ki zárt alakban:

a) $\sum_{k=1}^{n} k$; b) $\sum_{k=1}^{n} k^2$; c) $\sum_{k=1}^{n+1} \binom{k}{2}$; d) $\sum_{k=1}^{n} \sum_{j=1}^{k} j$; e) $\prod_{k=1}^{n} k^2$;

13. Bizonyítsuk be:

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(4k-3)(4k+1)} = \frac{n}{4n+1}.$$

14. Számítsuk ki:

a) $\lim_{x \to \infty} \dfrac{x^4 - x^3 - 3}{2x^4 + 3x^2 + 1}$; b) $\lim_{n \to \infty} \left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^n$; c) $\left(\dfrac{x+2}{x^2+3}\right)'$; d) $\left(\left(1 + \dfrac{1}{x}\right)^x\right)'$;

e) $\sin(2x)'$; f) $\sin(2x)''$; g) $\sin(2x)'''$; h) $\int_0^1 x^2 dx$; i) $\int \ln x \, dx$; j) $\int_5^7 \dfrac{x+2}{x^2+3} dx$.

15. Legyen

• $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 2 & 3 & 4 \end{bmatrix}$, • $B = \begin{bmatrix} 4 & 2 & -1 \\ 1 & 3 & 7 \end{bmatrix}$, • $C = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 3 & -1 & 2 \end{bmatrix}$.

Számítsuk ki az $(A - B) \cdot C^T$ mátrix inverzét.

16. Számítsuk ki az alábbi mátrixok determinánsát, sajátértékeit és sajátvektorait.

a) $\begin{bmatrix} 7 & -1 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}$; b) $\begin{bmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \end{bmatrix}$.

17. Számítsuk ki a 2×2-es, ill. 3×3-as mátrixok determinánsát általánosan.