Számelmélet III.

(kanonikus alak, Euler–Fermat-tétel)

Diszkrét matematika II. feladatsor

Gyakorlatvezető: Uray M. János

1. Írjuk fel kanonikus alakban, és határozzuk meg pozitív osztóinak számát:
   a) 9; b) 7; c) 45; d) 360; e) 13882; f) 104364.

2. Számítsuk ki az alábbi számpárok legnagyobb közös osztóját és legkisebb közös többszörösét a kanonikus alak segítségével:
   a) 245 és -280; b) -147 és 514; c) 713 és 276.

3. Mennyi $\phi(n)$, ha n:
   a) 1; b) 2; c) 3; d) 4; e) 10; f) 24; g) 96; h) 100.

4. Legyen $(n; 7) = 1$, ahol $n \in \mathbb{Z}$. Bizonyítsuk be, hogy:
   a) $7 \mid n^6 - 1$; b) $7 \mid n^{12} - 1$; c) $7 \mid n^{6k} - 1$, ahol $k \in \mathbb{Z}$.

5. Bizonyítsuk be, hogy $n^{13} - n$ osztható 2-vel, 3-mal, 5-tel, 7-tel és 13-mal ($n \in \mathbb{Z}$).

6. Bizonyítsuk be, hogy $n^7 \equiv n \mod 42$, ha $n \in \mathbb{Z}$.

7. a) Milyen maradékot ad 173^{163} 17-tel osztva? b) Mi 3^{2017} utolsó három számjegye?
   c) Mi 143^{143} utolsó három számjegye hármas számrendszerben?
   d) Milyen maradékot ad 323^{149} 63-mal osztva? e) Milyen maradékot ad 423^{173} 52-vel osztva?
   f) Milyen maradékot ad 495^{173} 98-cal osztva? g) Milyen maradékot ad 457^{101} 90-nel osztva?

8. a) Milyen maradékot ad $205^{206^{207}}$ 103-mal osztva?
   b) Mi $37^{39^{42}}$ utolsó két számjegye? c) Mi $11^{2013^{26}}$ utolsó két számjegye?
   d) Mi $17^{3^{2013}}$ utolsó két számjegye nyolcas számrendszerben?

9. Oldjuk meg az alábbi kongruenciákat az Euler–Fermat-tétel segítségével:
   a) $3x \equiv 8 \mod 13$; b) $21x \equiv 14 \mod 35$; c) $172x \equiv 6 \mod 62$; d) $12x \equiv 9 \mod 18$.

10. Bizonyítsuk be, hogy $a^{1729} \equiv a \mod 1729$ ($a \in \mathbb{Z}$). Ellentmond a Fermat-tételnek az, hogy 1729 nem prímszám?