Számelmélet II.

(Euklideszi algoritmus, kongruenciák)

Diszkrét matematika II. feladatsor

Gyakorlatvezető: Uray M. János

1. Számítsuk ki euklideszi algoritmussal az alábbi számpárok legnagyobb közös osztóját.
   a) 30 és 22; b) 86 és 31; c) 139 és 102; d) 255 és 111; e) 300 és 132; f) 332 és 88; g) 430 és 300; h) 518 és 154; i) 675 és 471; j) 432 és 300; k) 756 és 333; l) 504 és 150; m) 420 és 154; n) 1080 és 285; o) 2016 és 880; p) 2355 és 450.

2. Írjuk fel az előző feladat számpárjainak legnagyobb közös osztóját a két szám egész lineáris kombinációjaként.

3. Oldjuk meg az alábbi egyenleteket $x, y \in \mathbb{Z}$-re:
   a) $172x + 62y = 38$; b) $82x + 22y = 34$; c) $450x + 86y = 100$; d) $125x + 45y = -20$.

4. Egy ládában százlábúak vannak. Két fajtájuk van, az egyiknek 14 lába van, a másiknak 20. A ládában összesen 232 láb van. Hány százlábú van a ládában?

5. Egy dobozban 100 és 200 forintos érmék vannak. Egy 100 forintos súlya 8 gramm, egy 200 forintosé 9 gramm, és a dobozban lévő érmék összesen 111 gramm súlyúak. Hány forint van a dobozban?

6. Oldjuk meg az alábbi kongruenciákat:
   a) $3x \equiv 8 \mod 13$; b) $21x \equiv 14 \mod 35$; c) $172x \equiv 6 \mod 62$;
   d) $12x \equiv 9 \mod 18$; e) $26x \equiv 12 \mod 22$; f) $20x \equiv 19 \mod 22$;
   g) $16x \equiv 36 \mod 28$; h) $126x \equiv 46 \mod 99$.

7. Melyek azok a száznál kisebb természetes számok, amelyek 23-szorosát hetes számrendszerben felírva az utolsó számjegy 5 lesz, az utolsó előtti pedig 2? Kongruenciákkal oldjuk meg.

8. Oldjuk meg az alábbi kongruencia-rendszereket:
   a) $\begin{array}{l} x \equiv 2 \mod 7 \\ x \equiv 5 \mod 8; \end{array}$ b) $\begin{array}{l} 3x \equiv 2 \mod 4 \\ 4x \equiv 3 \mod 5; \end{array}$ c) $\begin{array}{l} x \equiv 2 \mod 3 \\ x \equiv 3 \mod 4 \\ x \equiv 1 \mod 5; \end{array}$ d) $\begin{array}{l} 4x \equiv 2 \mod 3 \\ 3x \equiv 2 \mod 7 \\ 9x \equiv 7 \mod 11; \end{array}$
   e) $\begin{array}{l} 3x \equiv 1 \mod 4 \\ 7x \equiv 2 \mod 9 \\ 9x \equiv 3 \mod 13; \end{array}$ f) $\begin{array}{l} 5x \equiv 1 \mod 6 \\ 7x \equiv 9 \mod 10; \end{array}$ g) $\begin{array}{l} 5x \equiv 2 \mod 6 \\ 7x \equiv 3 \mod 10; \end{array}$ h) $\begin{array}{l} 5x \equiv 3 \mod 6 \\ 3x \equiv 9 \mod 10 \\ 8x \equiv 9 \mod 15; \end{array}$

9. Mi az a legkisebb természetes szám, amely 28-as számrendszerben 3-ra, 19-es számrendszerben 4-re végződik? Kongruenciákkal oldjuk meg.

10. Melyek azok az egész számok, amelyek 3-mal osztva 1-et, 4-gyel osztva 2-t, és 5-tel osztva 3-at adnak maradékul?

Nehezebb feladatok

11. Bizonyítsuk be, hogy bármely m, n természetes számokhoz van olyan $ax + by = c$ diofantikus egyenlet ($a, b, c \in \mathbb{Z}$ paraméterekkel), amelynek a természetes számok körében az egyetlen megoldása $x = m$ és $y = n$.

12. Oldjuk meg az alábbi diofantikus egyenleteket (azaz írjuk fel az összes egész megoldását):
a) $12x - 30y + 24z = 18$; b) $22x + 11y - 110z = 32$.