

# Számelmélet I.

(Maradékos osztás, oszthatóság)

Diszkrét matematika II. feladatsor

Gyakorlatvezető: Uray M. János

1. Osszuk el maradékosan  $a$ -t  $b$ -vel:

- a)  $a = 20, b = 6$ ;   b)  $a = -71, b = 5$ ;   c)  $a = 102, b = -7$ ;   d)  $a = -68, b = -11$ ;  
e)  $a = 5, b = 12$ ;   f)  $a = -104, b = 8$ ;   g)  $a = -327, b = -42$ ;   h)  $a = -3, b = 12$ .

2. Legyen  $a, b \in \mathbb{Z}$ , melyekre:

- $a \bmod 7 = 3$ ,   •  $b \bmod 7 = 6$ .

Számítsuk ki és igazoljuk:

- a)  $a + b \bmod 7$ ;   b)  $a - b \bmod 7$ ;   c)  $ab \bmod 7$ .

3. Legyen  $a, b, m \in \mathbb{Z}$ ,  $m \neq 0$ . Bizonyítsuk be, hogy az alábbi kifejezések csak  $(a \bmod m)$ -től és  $(b \bmod m)$ -től függenek,  $a$  és  $b$  konkrét értékétől nem:

- a)  $a + b \bmod m$ ;   b)  $a - b \bmod m$ ;   c)  $ab \bmod m$ .

4. Számítsuk ki:

- a)  $2019^3 \bmod 6$ ;   b)  $2019^{32} \bmod 7$ ;   c)  $2019^{288} \bmod 7$ ;   d)  $1017677^{838}$  utolsó számjegye.

5. Írjuk fel a megadott számrendszerben:

- a)  $674 \rightarrow 2$ ;   b)  $1864 \rightarrow 2$ ;   c)  $376529 \rightarrow 2$ ;  
d)  $674 \rightarrow 3$ ;   e)  $1864 \rightarrow 3$ ;   f)  $376529 \rightarrow 3$ ;  
g)  $674 \rightarrow 5$ ;   h)  $1864 \rightarrow 5$ ;   i)  $376529 \rightarrow 5$ .

6. Számoljuk ki a megadott számrendszerben:

- a)  $10011001_2 + 101011010_2$ ;   b)  $1001_2 \cdot 1101_2$ ;   c)  $1221_3 \cdot 2112_3$ ;   d)  $1234_5 + 4321_5$ ;  
e)  $1234_5 \cdot 4321_5$ ;   f)  $1236_7 \cdot 6321_7$ ;   g)  $10011001_2 / 101_2$ ;  
h)  $110110010101101_2 / 101111001_2$ ;   i)  $12011_3 / 201_3$ .

7. Melyikből következik melyik? Indokoljuk. ( $a, b, c \in \mathbb{Z}^+$ )

- a)  $a \mid b \wedge a \mid c \stackrel{?}{\iff} a \mid b + c$ ;   b)  $a \mid b + c \wedge a \mid b \stackrel{?}{\iff} a \mid c$ ;  
c)  $a \mid c \wedge b \mid c \stackrel{?}{\iff} ab \mid c$ ;   d)  $a \mid b \wedge a \mid c \stackrel{?}{\iff} a \mid bc$ ;   e)  $a \mid b \wedge c \mid d \stackrel{?}{\iff} ab \mid cd$ ;  
f)  $a \mid b \wedge a \mid c \stackrel{?}{\iff} a \mid b + c \wedge a \mid b - c$ ;   g)  $a \mid b \wedge a \mid c \stackrel{?}{\iff} a \mid 2b + 5c \wedge a \mid 3b + 7c$ .

8. Legyen  $n \in \mathbb{Z}$ . Bizonyítsuk be, hogy:

- a)  $2 \mid n(n + 1)$ ;   b)  $6 \mid n(n + 1)(2n + 1)$ ;   c)  $30 \mid n^5 - n$ ;  
d)  $960 \mid (n^3 - n)(n^2 - 4)$ , ha  $2 \mid n$ , de  $4 \nmid n$ .

9. Bizonyítsuk be, hogy három egymást követő egész szám köbének összege osztható:

- a) a középső szám 3-szorosával;   b) 9-cel.

10. Bizonyítsuk be, hogy azok a hatjegyű számok, amelyeknek az első három számjegye megegyezik az utolsó hárommal, oszthatók 7-tel, 11-gyel és 13-mal.
11. Bizonyítsuk be, hogy bármely két páratlan négyzetszám különbsége osztható 8-cal.

## Nehezebb feladatok

12. A szultán 1-től 100-ig számozott celláiban egy-egy rabot tart fogva, minden cellát gondosan zárva tarva. Egy napon a szultánnak jó kedve támad, és elhatározza, hogy néhány rabot szabadon ereszt. Ezért leküldi egymás után 100 emberét, és a  $k$ -edik ember minden  $k$ -val osztható cella zárján állít egyet (ha nyitva volt, bezárja, ha zárva volt, akkor kinyitja). Mely sorszámú cellák lesznek a végén nyitva?
13. Bizonyítsuk be, hogy öt egymást követő négyzetszám összege nem lehet négyzetszám.
14. A számrendszerfogalom kiterjeszthető negatív egész  $b \leq -2$  alapszámokra is, azaz bármely  $n \in \mathbb{Z}$  felírható  $b$ -alapú számrendszerben  $n = \pm \sum_{i=0}^k d_i b^i$  alakban, ahol  $0 \leq d_i \leq |b| - 1$ . Írjuk fel az alábbi számokat  $-5$ -ös számrendszerben:  
a)  $-121$ ;   b)  $127$ ;   c)  $2636$
15. Tegyük fel, hogy az  $\overline{abc}$  háromjegyű szám osztható 37-tel. Igazoljuk, hogy ekkor  $\overline{bca}$  is osztható 37-tel.
16. Bizonyítsuk be, hogy  $23 \mid 5a + 9b \implies 23 \mid 3a + 10b$ .
17. Mely  $n$  egész számokra lesz  $\frac{n^6 - 3}{n^2 + 2}$  is egész szám?
18. Bizonyítsuk be, hogy minden  $n$  természetes számra  $133 \mid 11^{n+2} + 12^{2n+1}$ .
19. Van  $2^{1000}$ -nek olyan többszöröse, amelyben csak az 1 és a 2 számjegyek szerepelnek?