Polinomok II.

(gyökök, helyettesítési érték)

Diszkrét matematika II. feladatsor

Gyakorlatvezető: Uray M. János

1. Határozzuk meg az $x^2 + 4x + 3 \in \mathbb{Z}_8[x]$ polinom összes gyökét.

2. Határozzuk meg az alábbi polinomok legnagyobb közös osztóját $\mathbb{Q}[x]$-ben:
   a) $2x^3 + x^2 - 2x - 1, \quad x^2 - 2x + 1$; b) $x^4 + x^3 - 3x^2 - 4x - 1, \quad x^3 + x^2 - x - 1$;
   c) $x^5 + x^4 - x^3 - 2x - 1, \quad 3x^4 + 2x^3 + x^2 + 2x - 2$; d) $7x^4 - 28x^3 + 7, \quad 11x^3 - 33x^2 + 11$.

3. Oldjuk meg u-ra és v-re az alábbi egyenleteket a megadott polinomgyűrű felett:
   a) $u, v \in \mathbb{Q}[x], \quad (2x^3 + x^2 - 2x - 1)u + (x^2 - 2x + 1)v = x - 1$;
   b) $u, v \in \mathbb{Q}[x], \quad (3x^3 - 2x^2 + x + 2)u + (x^2 - x + 1)v = x$;
   c) $u, v \in \mathbb{Z}_2[x], \quad (x^5 + x^2 + 1)u + (x^4 + x^2 + x)v = 1$;
   d) $u, v \in \mathbb{Z}_2[x], \quad (x^4 + 1)u + (x^3 + x^2 + x + 1)v = x^3 + x + 1$.

4. Határozzuk meg az alábbi $\mathbb{C}[x]$-beli polinom helyettesítési értékét az adott c helyen, az $x-c$-vel való maradékos osztás segítségével.
   a) $x^4 - 3x^3 + 6x^2 - 10x + 16,\ c = 4$; b) $x^5 + 2x^4 + 3x^3 - x^2 + 2x + 1,\ c = i$;
   c) $x^5 + (1 + 2i)x^4 - (1 + 3i)x^2 + 7,\ c = -2 - i$; d) $x^4 - 3ix^3 - 4x^2 + 5ix - 1,\ c = 1 + 2i$.

5. Értékeljük ki Horner-módszer segítségével az $f(x) = x^4 - 3x^3 + x + 6$ polinomot az alábbi helyeken:
   a) $x = 3$; b) $x = -1$; c) $x = 2$; d) $x = -2$.

6. Számítsuk ki az $f(x) = 3x^5 + 2x^2 - 7x + 2$ polinomnak a megadott $g(x)$-szel való maradékos osztásának hányadosát és maradékát a megadott gyűrűben.
   a) $g(x) = x - 3 \in \mathbb{Z}[x]$, b) $g(x) = x + 2 \in \mathbb{Z}[x]$, c) $g(x) = x - \dfrac{1}{2} \in \mathbb{Q}[x]$,
   d) $g(x) = x - 3 \in \mathbb{Z}_5[x]$, e) $g(x) = x - 3 \in \mathbb{Z}_3[x]$.

7. Számítsuk ki $f(x)$ és $g(x)$ maradékos osztásának hányadosát és maradékát a Horner-módszer segítségével:
   a) $f(x) = 4x^3 + x^2,\ g(x) = x + 1 + i$; b) $f(x) = x^3 - x^2 - x,\ g(x) = x - 1 + 2i$;

8. Határozzuk meg p értékét úgy, hogy $x^5 - 3x^4 + 5x + p$ osztható legyen $x - 2$-vel.

Nehezebb feladatok

9. Számítsuk ki az alábbi polinomok legnagyobb közös osztóját, ahol n és m tetszőleges pozitív egész szám:
   a) $x^n - 1$ és $x^m - 1$; b) $x^n + 1$ és $x^m + 1$.

10. Mi az a legalacsonyabb fokú $\mathbb{Q}[x]$-beli polinom, amely az f-fel osztva u, a g-vel osztva v maradékot ad:

- $f = x^3 + 1$,
- $g = x^3 + x^2 - 2$,
- $u = -x^2$,
- $v = x^2 - 2x + 2$?