

Algebrai struktúrák

Diszkrét matematika II. feladatsor

Gyakorlatvezető: Uray M. János

- Döntsük el, hogy melyek csoportok, ill. melyek félcsoportok:
 - $(\mathbb{Z}, +)$; b) (\mathbb{Z}, \cdot) ; c) (\mathbb{Q}, \cdot) ; d) $(\mathbb{Q} \setminus \{0\}, \cdot)$; e) (\mathbb{Z}, \odot) , ahol $a \odot b = (a + b)/2$;
 - (\mathbb{Q}, \odot) , ahol $a \odot b = (a + b)/2$; g) $(\mathbb{R}, /)$; h) $(\mathbb{R} \setminus \{0\}, /)$;
 - $(F, +)$, ahol $F = \{f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}\}$ és $(f + g)(x) = f(x) + g(x)$;
 - (F, \odot) , ahol $F = \{f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}\}$ és $(f \odot g)(x) = \max(f(x), g(x))$.
- Döntsük el, hogy melyek gyűrűk, ill. melyek testek:
 - $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$; b) $(\mathbb{N}, +, \cdot)$; c) $(\mathbb{R}, +, \cdot)$; d) $(2\mathbb{Z}, +, \cdot)$; e) $(n\mathbb{Z}, +, \cdot)$, ha $n \in \mathbb{Z}$;
 - \mathbb{R}^3 az elemenkénti összeadással, szorzással; g) $(\{a + b\sqrt{2} \mid a, b \in \mathbb{Z}\}, +, \cdot)$;
 - $(\{a + b\sqrt{2} \mid a, b \in \mathbb{Q}\}, +, \cdot)$; i) $(\{a + bi \mid a, b \in \mathbb{Z}\}, +, \cdot)$;
 - $(\mathbb{Z}^{n \times n}, +, \cdot)$; k) $(\mathbb{R}^{n \times n}, +, \cdot)$; l) $(\mathbb{Z}_m, +, \cdot)$, ha $m \in \mathbb{N}^+$; m) H halmaz esetén $(2^H, \Delta, \cap)$.
- Legyen $(S, +)$ Abel-csoport. Legyen \circ a következő művelet: $\forall a, b \in S : a \circ b = 0$, ahol 0 az $(S, +)$ semleges eleme. Bizonyítsuk be, hogy $(S, +, \circ)$ gyűrű.
- Írjuk fel Z_5 összeadási és szorzási táblázatát.
- Mik a nullosztók Z_{12} -ben?
- Felbonthatatlan-e, ill. prím-e Z_{10} -ben $\bar{5}$?
- Testet alkotnak-e \mathbb{Z}_{2m} -ből a páros elemek (a \mathbb{Z}_{2m} -beli összeadásra és szorzásra nézve), ha:
 - $2m = 10$; b) $2m = 20$.
- Gyűrűt, ill. testet alkotnak-e:
 - a $[-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ függvények a pontonkénti összeadásra és szorzásra nézve;
 - az $\left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ 2b & a \end{pmatrix} \mid a, b \in \mathbb{R} \right\}$ mátrixok a mátrixműveletekre;
 - az $\left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ 2b & a \end{pmatrix} \mid a, b \in \mathbb{Q} \right\}$ mátrixok a mátrixműveletekre;

Nehezebb feladatok

- Bizonyítsuk be, hogy ha $(T, +, \cdot)$ véges integritási tartomány legalább két elemmel, akkor test.
- Soroljuk fel (izomorfizmus erejéig) az összes négyelemű egységelemes gyűrűt. Melyek testek közülük?

11. Bizonyítsuk be, hogy testet alkotnak az elemenkénti összeadással és a megadott szorzással:
a) $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2, (a, b) \cdot (c, d) = (ac + bd, ad + bc + bd)$; b) $\mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_3, (a, b) \cdot (c, d) = (ac - bd, ad + bc)$.
12. Legyen $\alpha \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{Q}$ olyan szám, melyre $\alpha^2 + r\alpha + s = 0$, ahol $r, s \in \mathbb{Q}$. Bizonyítsuk be, hogy $\mathbb{Q} + \alpha\mathbb{Q}$ test.