

## Komplex számok

### 1. feladat

Végezzük el a következő műveleteket a komplex számok halmazán.

$$\sqrt{-16} \qquad \sqrt{-25} \qquad (2i)^2 \qquad 2i + 5i \qquad \frac{4i}{2i}$$

### 2. feladat

Legyen  $z \in \mathbb{C}$ ,  $z = -2 + 7i$ . Adja meg a  $z$  komplex szám következő jellemzőit.

$$\operatorname{Re} z \qquad \operatorname{Im} z \qquad -z \qquad \bar{z} \qquad |z|$$

### 3. feladat

Végezzük el a következő műveletet az algebrai alak felhasználásával:  $\frac{4 + 3i}{(2 - i)^2}$

### 4. feladat

Oldja meg a következő egyenletet a komplex számok halmazán:  $\frac{x + i - 3i\bar{x}}{x - 4} = i - 1$

### 5. feladat

Határozza meg azt a  $z \in \mathbb{C}$  komplex számot, amelyre teljesül hogy

$$\left| \frac{z - 3}{2 - \bar{z}} \right| = 1 \wedge \operatorname{Re} \left( \frac{z}{2 + i} \right) = 2$$

### 6. feladat

Legyen  $z \in \mathbb{C}$ ,  $z = 2 + 5i$ . Adja meg a  $z$  komplex szám abszolút értékét és argumentumát. Szemléltesse a  $z$  komplex számot a Gauss-számsíkon.

### 7. feladat

Határozza meg a következő komplex számok trigonometrikus alakját.

- |   |          |
|---|----------|
| (a) $1 + i$                                       | (e) $4i$ |
| (b) $-\sqrt{3} + i$                               | (f) $i$  |
| (c) $\frac{9}{2} - \frac{9\sqrt{3}}{2}i$          | (g) $10$ |
| (d) $-\frac{\sqrt{14}}{2} - \frac{\sqrt{14}}{2}i$ |          |

**8. feladat**

Végezze el a következő műveleteket a trigonometrikus alak felhasználásával.

$$(a) \left( \frac{9}{2} - \frac{9\sqrt{3}}{2}i \right) \left( -\frac{\sqrt{14}}{2} - \frac{\sqrt{14}}{2}i \right)$$

$$(b) \left( -\frac{3\sqrt{3}}{2} - \frac{3}{2}i \right) \left( \frac{\sqrt{3}}{3} + \frac{1}{3}i \right)$$

$$(c) \frac{-\frac{3\sqrt{3}}{2} - \frac{3}{2}i}{\frac{\sqrt{3}}{3} + \frac{1}{3}i}$$

$$(d) \left( \frac{5\sqrt{3}}{12} - \frac{5}{12}i \right)^{10}$$

$$(e) \left( -\frac{\sqrt{10}}{2} - \frac{\sqrt{10}}{2}i \right)^{15}$$

$$(f) \left( \frac{5}{2} - \frac{5\sqrt{3}}{2}i \right)^{23}$$

$$(g) (1+i)^8 \cdot (5\sqrt{3} - 5i)^3$$

$$(h) \left( \frac{\frac{3}{2} + \frac{3\sqrt{3}}{2}i}{-\frac{5\sqrt{3}}{2} + \frac{5}{2}i} \right)^{12}$$

$$(i) \left( 1 - \frac{\sqrt{3}-i}{2} \right)^{24}$$

**9. feladat**

Végezze el a következő gyökvonásokat a komplex számok halmazán.

$$(a) -64 \text{ második gyöke}$$

$$(b) -64 \text{ harmadik gyöke}$$

$$(c) 1 - \sqrt{3}i \text{ hatodik gyöke}$$

$$(d) -7\sqrt{3} + 7i \text{ ötödik gyöke}$$

$$(e) -\frac{7}{2} + \frac{7}{2}i \text{ nyolcadik gyöke}$$

$$(f) -6\sqrt{3} + 6i \text{ második gyöke}$$

$$(g) \frac{\left( \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i \right)^8}{(1+i)^5} \text{ hetedik gyöke}$$

**10. feladat**

A trigonometrikus alak segítségével számítsa ki  $z$  értékét trigonometrikus és algebrai alakban is, majd adja meg az összes olyan  $w$  komplex számot trigonometrikus alakban, melyekre  $w^3 = z$ , ahol

$$z = \frac{(2 + 2\sqrt{3}i)^{10}}{(-1 + i)^{83}}.$$

**11. feladat**

Írjuk fel algebrai alakban a  $z = \frac{(1+i)^8}{(1-\sqrt{3}i)^6}$  komplex számot.

**12. feladat**

A sík mely geometriai transzformációjának felelnek meg a következő leképezések?

- (a)  $z \mapsto 3z + 2$   
 (b)  $z \mapsto (1 + i)z$   
 (c)  $z \mapsto 1/\bar{z}$

**13. feladat**

A Gauss-számsíkon egy négyzet középpontja a  $K = 1 + 2i$  illetve egyik csúcsa az  $A = 5 + 4i$  komplex számnak megfelelő pontban van. Határozza meg a négyzet többi csúcsának megfelelő komplex számokat.

**14. feladat**

Legyen  $z, w$  két különböző komplex szám! Írja fel az őket összekötő szakasz felezőpontját, valamint annak a két szabályos háromszögnek a harmadik csúcsát, illetve súlypontját, melyeknek  $z, w$  csúcsai!

**15. feladat**

Forgassa el síkban a  $\begin{bmatrix} 2 \\ -2\sqrt{3} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^2$  vektort (a) 34 (b)  $-176$  fokkal.

**16. feladat**

Tekintsük a következő halmazokat:

$$\begin{aligned} A &= \{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Re} z > 1\} \\ B &= \{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Im} z < 2\} \\ C &= \{z \in \mathbb{C} \mid |z - 2| = 3\} \\ D &= \{z \in \mathbb{C} \mid z^2 - (3 + 2i)z + (5 + 5i) = 0\} \end{aligned}$$

Ábrázolja a következő halmazokat a Gauss-számsíkon.

- (a)  $A$       (b)  $B$       (c)  $C$       (d)  $D$       (e)  $A \cap B$       (f)  $A \cup B$   
 (g)  $A \cap C$       (h)  $B \cup C$       (i)  $A \setminus B$       (j)  $A \triangle B$       (k)  $A \cap D$       (l)  $C \setminus \bar{B}$

**17. feladat**

Ábrázolja a következő halmazokat a Gauss-számsíkon.

- (a)  $\{z \in \mathbb{C} \mid |z - i + 2| = 10\}$   
 (b)  $\{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Re} z = \operatorname{Im} z\}$   
 (c)  $\{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Re} z \geq \operatorname{Im} z\}$   
 (d)  $\{z \in \mathbb{C} \mid |z - 2| \leq |z + 3|\}$   
 (e)  $\{z \in \mathbb{C} \mid 2 < |z + i - 2| \leq 4\}$

**18. feladat**

Az alábbi számok közül melyek egységgyökök, mennyi ezek rendje, milyen  $n$ -re lesznek ezek  $n$ -edik egységgyökök, illetve primitív  $n$ -edik egységgyökök?

- (a) 1      (b)  $-1$       (c)  $i$

- (d)  $1 + i$                       (e)  $\frac{1+i}{\sqrt{2}}$                       (f)  $\frac{1+\sqrt{3}i}{2}$
- (g)  $\frac{-1+\sqrt{3}i}{2}$                       (h)  $\frac{-1+\sqrt{3}i}{2}$                       (i)  $\cos(\sqrt{2}\pi) + i \sin(\sqrt{2}\pi)$
- (j)  $\cos\left(\frac{\pi}{361}\right) + i \sin\left(\frac{\pi}{361}\right)$

**19. feladat**

Mutassuk meg, hogy ha  $\varepsilon^4 = i$ , akkor  $4 \mid o(\varepsilon)$ !

**20. feladat**

Ha  $o(\varepsilon) = 128$ , akkor mennyi lehet  $o(i \cdot \varepsilon)$ ?

**21. feladat**

- (a) A  $z = -1 - \sqrt{3}i$  egyik negyedik gyöke  $w_0 = \frac{\sqrt[4]{2}}{2}(\sqrt{3} - i)$ . Alkalmas primitív negyedik egységgyök segítségével állítsa elő a többi negyedik egységgyököt majd ezek felhasználásával számítsa ki  $z$  többi negyedik gyökét.
- (b) A  $z = -i$  egyik hatodik gyöke  $w_0 = \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i$ . Alkalmas primitív hatodik egységgyök segítségével állítsa elő a többi hatodik egységgyököt majd ezek felhasználásával számítsa ki  $z$  többi hatodik gyökét.

(A komplex gyökvonás képlete ebben a feladatban nem használható.)