

Halmazok

1. feladat

Legyen az alaphalmaz $U = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$, továbbá legyen $A = \{1, 2, 3, 4\}$, $B = \{0, 2, 4, 8\}$, $C = \{2, 3, 5, 7\}$.

(a) Határozza meg a következő halmazokat:

$$A \cap B \qquad B \cup C \qquad A \setminus C \qquad \bar{C}$$

(b) Tekintsük az $X = \{A, B, C\}$, $Y = \{\{0, 2, 4, 6, 8\}, \{1, 3, 5, 7, 9\}\}$ halmazrendszereket. Határozza meg a következő halmazokat.

$$\cap X \qquad \cup X \qquad X \cup Y \qquad X \cap Y$$

(c) Állapítsa meg a következő kijelentések logikai értékét:

$$\begin{array}{llll} 4 \in B & A \subseteq B & \{\emptyset\} \subseteq X \cup Y & 3 \in A \cap B \\ \{1, 2\} \subseteq A & A \in X \cup Y & A \subseteq X \cup Y & C \cap \emptyset = \emptyset \\ 2 \subseteq A & \{2\} \subseteq A & 2 \in X \cup Y & \{2\} \in X \cap Y \end{array}$$

2. feladat

Keressünk olyan A, B, C halmazokat, melyekre egyszerre teljesülnek a következők:

$$A \cap B \neq \emptyset, \quad A \cap C = \emptyset, \quad (A \cap B) \setminus C = \emptyset.$$

3. feladat

Legyen $A = \{a, b, c, d\}$, $B = \{c, d\}$, $C = \{a, c, e\}$. Mutassuk meg, hogy ekkor $A \setminus (B \setminus C) = (A \setminus B) \cup (A \cap C)$. Igaz-e ez az állítás tetszőleges A, B, C halmazokra?

4. feladat

Tekintsük az $X = \{\{1, 2, 3\}, \{2, 3, 4, 5\}, \{0, 2, 3, 7\}\}$ halmazrendszert. Határozza meg a következő halmazokat: $\cap X$, $X \cup \{5, 6, 7, 8\}$, $\cup (X \cup \{5, 6, 7, 8\})$, $\cap (X \cup \{5, 6, 7, 8\})$, $X \cup \{\{3, 5, 7\}, \{1\}, \{2\}\}$, $\cup (X \cup \{\{3, 5, 7\}, \{1\}, \{2\}\})$, $\cap (X \cup \{\{3, 5, 7\}, \{1\}, \{2\}\})$.

5. feladat

Legyen $\mathcal{A} = \{\{a, b, c\}, \{a, d, e\}, \{a, f\}\}$. Mi lesz $\cup \mathcal{A}$ és $\cap \mathcal{A}$?

6. feladat

Határozza meg az A, B, C halmazok elemeit, ha tudjuk, hogy $A \setminus B = \{1, 3, 5\}$, $A \cup B \cup C = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, $(A \cap C) \cup (B \cap C) = \emptyset$, $C \setminus B = \{2, 4\}$ és $(A \cap B) \setminus C = \{6\}$.

7. feladat

Legyenek A, B, C tetszőleges halmazok, U az alaphalmaz, $A, B, C \subseteq U$. Igazoljuk a következő azonosságokat.

$$\begin{array}{ll} (a) \quad A \cup B = B \cup A & (g) \quad \overline{A \cup B} = \bar{A} \cap \bar{B} \\ (b) \quad (A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C) & (h) \quad \overline{A \cap B} = \bar{A} \cup \bar{B} \end{array}$$

- (c) $A \cap B = B \cap A$ (i) $A \cup \bar{A} = U$
 (d) $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$ (j) $A \cap \bar{A} = \emptyset$
 (e) $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$ (k) $\overline{\bar{A}} = A$
 (f) $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$

8. feladat

Igazolja a következő azonosságokat.

- (a) $A \Delta \emptyset = A$
 (b) $A \Delta A = \emptyset$
 (c) $A \Delta (B \Delta C) = (A \Delta B) \Delta C$
 (d) $A \Delta (A \Delta B) = B$

9. feladat

Legyenek A, B, C tetszőleges halmazok. Igazoljuk a következő állításokat.

- (a) ha $A \subseteq C$ és $B \subseteq C$ akkor $A \cup B \subseteq C$
 (b) ha $A \subseteq B$ és $A \subseteq C$ akkor $A \subseteq B \cap C$
 (c) $A \cup (B \cap A) = A$

10. feladat

Legyen A és B nemüres halmazok. Igazolja a következő egyenlőségeket.

- (a) $(A \setminus B) \cap B = \emptyset$
 (b) $(A \cup \bar{B}) \cap (\bar{A} \cup \bar{B}) = \bar{B}$

11. feladat

Hozzuk egyszerűbb alakra a következő kifejezést: $(A \cup (A \cap B) \cup (A \cap B \cap C)) \cap (A \cup B \cup C)$.

12. feladat

Legyen az alaphalmaz U továbbá $A, B, C \subseteq U$ tetszőleges halmazok. Igazolja a következő egyenlőségeket.

- (a) $(A \cap B) \setminus C = (A \setminus C) \cap (B \setminus C)$
 (b) $A \setminus (B \cup C) = (A \setminus B) \cap (A \setminus C)$
 (c) $A \setminus (A \setminus (B \setminus C)) = A \cap B \cap \bar{C}$

13. feladat

Legyen $A = \{1, 2\}$, $B = \{a, b, c\}$ és $C = \{2, 3, 4\}$. Határozza meg az $A \times A$, $A \times B$, $A \times A \times B$, $B \times A$, $(A \times A) \times B$, $A \times (A \times B)$, $A \Delta B$, $A \Delta C$ halmazokat.

14. feladat

Legyenek A, B, C nemüres halmazok. Igazolja a következő egyenlőséget:

$$(A \cup B) \times C = (A \times C) \cup (B \times C).$$

15. feladat

Legyenek A, B, C, D nemüres halmazok. Bizonyítsuk be, hogy $A \times B \subseteq C \times D$ akkor és csak akkor teljesül, ha $A \subseteq C$ és $B \subseteq D$.

16. feladat

Bizonyítsa be a következő összefüggést: $\overline{(\overline{A \cap B} \cup C)} \cap \overline{A} \cup \overline{B} \cup \overline{C} = A \cup \overline{B} \cup \overline{C}$.

17. feladat

Legyenek A és B tetszőleges halmazok. Bizonyítsuk be, hogy $P(A \cap B) = P(A) \cap P(B)$, ahol $P(A)$ jelöli A hatványhalmazát. Igaz-e az állítás unióval?

18. feladat

Döntse el, hogy igazak-e a következő egyenlőségek tetszőleges A, B, C halmazokra. Állításait bizonyítsa.

- (a) $\overline{A} \cap B = B \setminus A$
- (b) $(A \cap B) \setminus C = (A \setminus B) \cap C$
- (c) $(A \cup B) \cap (B \setminus A) = (A \cup B) \setminus (A \setminus B)$
- (d) $(A \cap B) \setminus C = (A \setminus C) \cap (B \setminus C)$
- (e) $(A \cup B) \setminus A = B$
- (f) $(A \cup B) \setminus C = A \cup (B \setminus C)$