

## Függvények

### 1. feladat

Válasszuk ki a következő relációk közül a függvényeket. Adja meg a függvények értelmezési tartományát, értékészletét. Mely függvény szürjektív, injektív, bijektív?

- (a)  $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}, B = \{10, 11, 12, 13, 14\}, f \subseteq A \times B, f = \{(1, 11), (2, 11), (4, 12), (5, 10)\}$   
 (b)  $A = \{1, 2, 3, 4\}, B = \{a, b, c, d, e, f\}, f \subseteq A \times B, f = \{(1, a), (2, c), (3, e), (3, f), (4, a)\}$   
 (c)  $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}, B = \{a, b, c, d, e, f\}, f \subseteq A \times B, f = \{(1, a), (4, e), (5, d)\}$   
 (d)  $A = \{1, 2, 3\}, B = \{1, 3, 5\}, f \subseteq A \times B, f = \{(1, 1), (2, 5), (3, 5)\}$

### 2. feladat

Legyen  $A = \{\text{olyan egyenlőszárú háromszögek, amelyeknek az alaphoz tartozó magasságuk egyenlő egy rögzített } m > 0 \text{ számmal}\}, B = \{y \in \mathbb{R} \mid y > 0\}$ . Definiáljuk az  $R \subseteq A \times B$  relációt a következőképpen:  $aRb, a \in A, b \in B$ , ha az  $a$  háromszög területe  $b$ . Mutassuk meg, hogy  $R$  függvény, és vizsgáljuk ennek a függvénynek a tulajdonságait (fennállnak-e a következők: szürjektív, injektív, bijektív).

### 3. feladat

- (a) Legyen  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) := 3x - 4$ . Bizonyítsa be, hogy a függvény bijektív, majd határozza meg az inverzét.  
 (b) Legyen  $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, g(x) := 3 - |x|$ . Bizonyítsa be, hogy a függvény se nem injektív, se nem szürjektív.

### 4. feladat

Döntsük el, hogy az alábbi relációk közül melyek függvények.

- (a)  $f \subseteq \mathbb{N} \times \mathbb{N}, xfy \iff x \mid y$   
 (b)  $f \subseteq \{0, 3, 5\} \times \{1, 2, 5\}, xfy \iff xy = 0$   
 (c)  $f \subseteq \{1, 2, 5\} \times \{0, 3, 5\}, xfy \iff xy = 0$   
 (d)  $f \subseteq \mathbb{N} \times \mathbb{N}, xfy \iff$  tízes számrendszerben  $x$  ugyanazokból a számjegyekből áll mint  $y$   
 (e)  $f \subseteq \mathbb{N} \times \mathbb{N}, xfy \iff 2x = y$   
 (f)  $f \subseteq \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}, xfy \iff x^2 = y^2$   
 (g)  $f \subseteq \mathbb{N} \times \mathbb{N}, xfy \iff x^2 = y^2$   
 (h)  $f \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}, xfy \iff x^2 + y^2 = 9$

### 5. feladat

Döntsük el, hogy az alábbi relációk közül melyek függvények.

- (a)  $f_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid 7x = y^2\} \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}$   
 (b)  $f_2 = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid x = y^2 + 6y\} \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}$   
 (c)  $f_3 = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid 7x^2 - 6 = y\} \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}$   
 (d)  $f_4 = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_0^+ \mid y = |x|\} \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}_0^+$   
 (e)  $f_5 = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid y = (x + 4)^2\} \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}$   
 (f)  $f_6 = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_0^+ \mid 2y = \sqrt{x}\} \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}_0^+$   
 (g)  $f_7 = \{(x, y) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \mid 7 \mid x - y\} \subseteq \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$   
 (h)  $f_8 = \{(x, y) \in (\mathbb{R} \setminus \{0\}) \times (\mathbb{R} \setminus \{0\}) \mid xy = 1\} \subseteq (\mathbb{R} \setminus \{0\}) \times (\mathbb{R} \setminus \{0\})$   
 (i)  $f_9 = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid xy = 1\} \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}$

- (j)  $f_{10} = \{(x, y) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \mid |x - y| \leq 3\} \subseteq \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$   
(k)  $f_{11} = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid y(1 - x^2) = x - 1\} \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}$   
(l)  $f_{12} = \{(x, y) \in (\mathbb{R} \setminus \{1, -1\}) \times (\mathbb{R} \setminus \{1, -1\}) \mid y(1 - x^2) = x - 1\} \subseteq (\mathbb{R} \setminus \{1, -1\}) \times (\mathbb{R} \setminus \{1, -1\})$
- Ha a reláció függvény, döntsük el, hogy injektív, szürjektív, bijektív-e illetve ha nem függvény, akkor reflexív, szimmetrikus, tranzitív-e.