Relációk, függvények

Diszkrét matematika 1. feladatsor

Gyakorlatvezető: Uray M. János

1. Az alábbi relációk közül melyik
   • reflexív, • irreflexív, • szimmetrikus, • antiszimmetrikus,
   • szigorúan antiszimmetrikus, • tranzitív, • dichotom, • trichotom:

   a) $\leq_{\mathbb{R}}$; b) $<_{\mathbb{R}}$; c) $\subseteq$; d) $\subset$; e) $R \subseteq \mathbb{Z}^+ \times \mathbb{Z}^+$, $xRy \Leftrightarrow x|y$;
   f) $R \subseteq \mathbb{C} \times \mathbb{C}$, $xRy \Leftrightarrow \Re(x) \leq \Re(y)$; g) $R \subseteq \mathbb{C} \times \mathbb{C}$, $xRy \Leftrightarrow \Re(x) = \Re(y)$;
   h) {síkbeli körök}-ön a „van közös pontja"; i) {emberek}-en az „ismeri";
   j) {emberek}-en a „rokona"; k) {emberek}-en a „testvére";
   l) $X = \{\text{kő}, \text{papír}, \text{olló}\}$, $R = \{(\text{kő}, \text{olló}), (\text{olló}, \text{papír}), (\text{papír}, \text{kő})\}$;
   m) $X = \{a, b, c\}$, $R = \{(a, b), (b, a), (b, b), (a, c)\}$?

2. Mutassuk meg, hogy ekvivalenciareláció ($\sim\, \subseteq X \times X$). Milyen osztályozást határoz meg?

   a) $X = \mathbb{C}$, $z \sim w \Leftrightarrow |z| = |w|$; b) $X = \mathbb{C} \setminus \{0\}$, $z \sim w \Leftrightarrow z/w = \pm 1$;
   c) $X = \mathbb{C} \setminus \{0\}, n \in \mathbb{N}^+$, $z \sim w \Leftrightarrow (z/w)^n = 1$; d) $X = \mathbb{Z}$, $x \sim y \Leftrightarrow 5|(x-y)$;
   e) $X = \mathbb{N} \times \mathbb{N}$, $(p, q) \sim (r, s) \Leftrightarrow ps = rq$.

3. Mi az $R \cap S$ reláció, ha:
   • $R \subseteq \mathbb{N} \times \mathbb{N}$, $mRn \Leftrightarrow m|n$ és • $S \subseteq \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$, $mSn \Leftrightarrow n = m + 6$.

4. Határozzuk meg az értelmezési tartományát, értékkészletét, és döntsük el, hogy függvény-e:

   a) $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 3 < x < 6 \wedge x < y < 2x\}$; b) $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid |x| + |y| \leq 1\}$;
   c) $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = (x-1)/(1-x^2)\}$; d) $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y(1-x^2) = x - 1\}$;
   e) $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid |x| = |y|\}$; f) $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = x - \lfloor x \rfloor\}$.

5. Az alábbi függvények közül melyik
   • injektív, • szürjektív, • bijektív:

   a) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2$; b) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_0^+$, $f(x) = x^2$; c) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^3$;
   d) $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, $f(n) = n^2$; e) $f : \{a, b, c\} \to \{a, b, c\}$, $f(a) = b, f(b) = a, f(c) = c$.

6. Mutassuk meg:

   a) ha R tranzitív és irreflexív reláció, akkor szigorúan antiszimmetrikus;
   b) ha R ekvivalenciareláció, akkor R^{-1} is az; c) ha R részbenrendezés, akkor R^{-1} is az;
   d) ha R tranzitív reláció, akkor $R \circ R$ is az; e) ha R reláció, akkor $R^{-1} \circ R$ szimmetrikus;
   f) ha R tranzitív és reflexív reláció, akkor $R = R \circ R$;
   g) ha f és g injektív, akkor $f \circ g$ is injektív; h) ha f és g szürjektív, akkor $f \circ g$ is szürjektív;
   i) ha f és g bijektív, akkor $f \circ g$ is bijektív.