

# Gráfelmélet 1.

Diszkrét matematika 2. feladatsor

Gyakorlatvezető: Uray M. János

- Nyolc embert (A, B, C, D, E, F, G és H) rablással gyanúsítanak, de közülük három bűnös, és a többi ártatlan. A következőket vallják:
  - A: „G ártatlan.”; • C: „H ártatlan.”; • D: „A ártatlan.”; • E: „B ártatlan.”;
  - F: „D ártatlan.”; • G: „E ártatlan.”; • H: „F ártatlan.”.Ha tudjuk, hogy az ártatlanok igazat mondanak, akkor kik követték el a rablást?
- Egy társaságban kézfogások történnek. Lehetséges, hogy mindenki különböző számú másik emberrel fogott kezét?
- Van-e olyan 9-csúcsú (nem feltétlenül egyszerű) gráf, melyben a csúcsok foka rendre:
  - a) 7, 7, 7, 6, 6, 6, 5, 5, 5;    b) 6, 6, 5, 4, 4, 3, 2, 2, 1?
- Van-e olyan *egyszerű* gráf, melyben a csúcsok foka rendre:
  - a) 1, 3, 3, 4, 5, 6, 6;    b) 6, 6, 6, 6, 3, 3, 2, 2;    c) 3, 3, 3, 2, 2, 2, 1, 1, 1;
  - d) 7, 7, 7, 6, 6, 6, 5, 5, 5;    e) 2, 2, 3, 5, 6, 6, 6, 8, 8;    f) 6, 6, 5, 4, 4, 3, 2, 2, 1?
- Rajzoljuk le az összes (páronként nem izomorf)
  - a) 3-csúcsú,    b) 4-csúcsú,    c) 5-csúcsúegyszerű gráfot. Hány összefüggő, illetve reguláris van közöttük?
- Hány olyan legfeljebb 5-csúcsú gráf van, amely izomorf a komplementerével?
- Ha egy egyszerű véges gráf nem összefüggő, akkor mit mondhatunk a komplementerének összefüggőségéről?
- Legfeljebb hány csúcsa lehet egy 19-élű gráfnak, ha minden csúcs fokszáma legalább 3?
- Rajzoljuk le a következő gráfot: a csúcsok legyenek a  $K_5$  gráf élei, és két ilyen csúcsot akkor kötünk össze, ha a nekik megfelelő  $K_5$ -beli élek nem szomszédosak.
- a) Bizonyítsuk be, hogy ha egy legfeljebb  $(2n + 1)$ -csúcsú gráfban minden csúcs legalább  $n$ -edfokú, akkor a gráf összefüggő.  
b) Mi a helyzet, ha csak annyit teszünk fel, hogy minden csúcs legalább  $(n - 1)$ -edfokú?
- Legyen egy gráf csúcshalmaza  $\{1, 2, \dots, 100\}$ . Összefüggő-e a gráf, és ha nem, hány komponens van, ha az élek a következők:
  - a)  $\{\{a, b\} \mid 2 \nmid a - b\}$ ;    b)  $\{\{a, b\} \mid 3 \mid a - b \wedge a \neq b\}$ ;
  - c)  $\{\{a, b\} \mid |a - b| \in \{3, 8\}\}$ ;    d)  $\{\{a, b\} \mid |a - b| \in \{6, 9\}\}$ ?