Diszkrét Matematika 1.
Második zárthelyi – kombinatorika, számelmélet / A

Számológép használata megengedett (kivéve grafikus ill. programozható számológép). Időtartam: 90 perc. A kombinatorikai feladatoknál a faktoriálisos vagy binomiális együtthatós alakokat nem kell számszerűen megadni. Minden feladat 10 pontot ér.

1. Az alábbi feladatokban adjuk meg a lehetőségek számát.

   a. Hányféleképpen lehet 10 különböző ajándékot kiosztani 30 gyermek közül pontosan 10-nek?
   b. Hányféleképpen lehet 10 különböző jutalmat kiosztani 30 gyerek között (egy gyerek akár több jutalmat is kaphat)?
   c. Hányféleképpen lehet 10 darab 100 Ft-ost kiosztani 30 gyerek közül pontosan 10-nek (a pénzérmék egyformák)?
   d. Hányféleképpen lehet 10 darab 100 Ft-ost kiosztani 30 gyerek között, ha egy gyerek többet is kaphat (a pénzérmék egyformák)?
   e. Hányféleképpen lehet kiosztani 1000 Ft-ot 30 gyerek között, ha a pénz 1 db 500-as, 1db 200-as, 2db 100-as és 2db 50-es formájában áll rendelkezésre? Az azonos címletű pénzek egyformák, és egy gyerek egynél több pénzdarabot is kaphat.

2. Hányféleképpen lehet egy piros, egy fehér és egy zöld dobozban elhelyezni pontosan 30 golyót, ha

   a. a golyók 1-től 30-ig meg vannak számozva, és mindhárom dobozba 10-10 golyó kerül?
   b. a golyók 1-től 30-ig meg vannak számozva, és a piros dobozba 8, a fehérbe 19, a zöldbe 3 golyó kerül?
   c. a golyók egyformák, és minden dobozba legalább 9 kerül?
   d. a golyók egyformák (egyéb kikötés nincs)?

   A dobozon belül nem számít a golyók sorrendje.

3. Legyen X az olyan tízjegyű számok halmaza, melyekben csak a $4, 5, 6, 7, 8, 9$ jegyek fordulnak elő. Számítsuk ki X azon elemeinek számát (nem kell számszerűen, elég egy olyan képlet, amit aztán számológépen könnyen kiszámolhatnánk), melyeknek

   a. az utolsó jegye páros;
   b. minden jegye páros;
   c. a $6, 7, 8, 9$ jegyek mindegyike előfordul benne;
   d. osztható 3-mal?

4. Végezzünk *bővített* euklideszi algoritmust a következő számpárokkal:

   a. $(111, 62)$;
   b. $(20, 35)$;
   c. $(40, 89)$;
   d. $(89, 55)$;

5. Oldjuk meg az alábbi feladatokat, azaz valamilyen formában adjuk meg az összes x értéket, melyek igazzá teszik (többféle megoldási mód is elfogadható, de csak a megoldást nem fogadjuk el, mindenképpen meg kell mondani, hogy jött ki):

   Segítség: lehet, hogy érdemes az előző feladat után nekiállni ennek.

   a. $62x \equiv 6 \pmod{111}$;
   b. $20x \equiv 10 \pmod{35}$;
   c. $40x \equiv 2 \pmod{89}$;
   d. $40x \equiv 7 \pmod{80}$.

6. Választható az alábbi két feladat közül. A választást tüntessük fel a beadott lapon.
   6D: Igazoljuk, hogy 5 természetes szám közül mindig kiválasztható 3 úgy, hogy az összegük osztható 3-mal.

   6F: Milyen maradékot ad 5-tel, 7-tel, illetve 10-zel osztva a következő hatvány: $2013^{2014^{2015}}$?