

Algebrai struktúrák

Diszkrét matematika 2. feladatsor

Gyakorlatvezető: Uray M. János

- Döntsük el, hogy melyek gyűrűk, ill. melyek testek:
 - $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$; b) $(\mathbb{N}, +, \cdot)$; c) $(\mathbb{R}, +, \cdot)$; d) $(2\mathbb{Z}, +, \cdot)$; e) $(n\mathbb{Z}, +, \cdot)$, ha $n \in \mathbb{Z}$;
 - \mathbb{R}^3 az elemenkénti összeadással, szorzással; g) $(\{a + b\sqrt{2} \mid a, b \in \mathbb{Z}\}, +, \cdot)$;
 - $(\{a + b\sqrt{2} \mid a, b \in \mathbb{Q}\}, +, \cdot)$; i) $(\{a + bi \mid a, b \in \mathbb{Z}\}, +, \cdot)$;
 - $(\mathbb{Z}^{n \times n}, +, \cdot)$; k) $(\mathbb{R}^{n \times n}, +, \cdot)$; l) $(\mathbb{Z}_m, +, \cdot)$, ha $m \in \mathbb{N}^+$; m) H halmaz esetén $(2^H, \Delta, \cap)$.
- Írjuk fel Z_5 összeadási és szorzási táblázatát.
- Legyen $(S, +)$ Abel-csoport. Legyen \circ a következő művelet: $\forall a, b \in S : a \circ b = 0$, ahol 0 az $(S, +)$ semleges eleme. Bizonyítsuk be, hogy $(S, +, \circ)$ gyűrű.
- Testet alkotnak-e Z_{2m} -ből a páros elemek (a Z_{2m} -beli összeadásra és szorzásra nézve), ha:
 - $2m = 10$; b) $2m = 20$.
- Gyűrűt, ill. testet alkotnak-e:
 - a $[-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ függvények a pontonkénti összeadásra és szorzásra nézve;
 - az $\left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ 2b & a \end{pmatrix} \mid a, b \in \mathbb{R} \right\}$ mátrixok a mátrixműveletekre;
 - az $\left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ 2b & a \end{pmatrix} \mid a, b \in \mathbb{Q} \right\}$ mátrixok a mátrixműveletekre;
- Bizonyítsuk be, hogy testet alkotnak az elemenkénti összeadással és a megadott szorzással:
 - $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2, (a, b) \cdot (c, d) = (ac + bd, ad + bc + bd)$; b) $\mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_3, (a, b) \cdot (c, d) = (ac - bd, ad + bc)$.
- Legyen $\alpha \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{Q}$ olyan szám, melyre $\alpha^2 + r\alpha + s = 0$, ahol $r, s \in \mathbb{Q}$. Bizonyítsuk be, hogy $\mathbb{Q} + \alpha\mathbb{Q}$ test.
- Soroljuk fel (izomorfizmus erejéig) az összes négyelemű egységelemes gyűrűt. Melyek testek közülük?
- Mik a nullosztók Z_{12} -ben?