Diszkrét Matematika 1.
Első zárthelyi dolgozat

Számológép használata megengedett (kivéve grafikus ill. programozható számológép). Időtartam: 90 perc. Minden feladat 10 pontot ér, a 2-es, 3-as, 4-es, 5-ös ponthatára: 20, 30, 40, 50.

1. Számítsa ki algebrai alakban a következőket:

   a. $(2+i)(3+i)$;
   b. $(-5+i)^2$;
   c. $(1+2i)/(2+i)$;
   d. $i+i^2+i^3+\ldots+i^{20}$;
   e. $(1-i)^8$.

2. A trigonometrikus alak segítségével számítsa ki a z értékét trigonometrikus és algebrai alakban is, majd adja meg az összes olyan w komplex számot trigonometrikus alakban, melyre $w^3=z$.

$$z=\frac{(1+\sqrt{3}i)^8}{(1+i)^{15}}$$

3. Adjunk meg két-két olyan komplex számot, melyre (külön-külön) teljesülnek az alábbiak:

   a. $\mathrm{Re}(z)^2=|z|$.
   b. $z^3=|z|$.
   c. $|z-2+i|\geq 3$.
   d. $|z|=|-iz^2|$.
   e. $|z-3|=|z+2|$.

4. Egy fiktív univerzum leírásához a következő predikátumokat használjuk: $B(x):x$ boszorkány, $V(x):x$ varászló, $F(x):x$ férfi, $N(x):x$ nő, $A(x):x$ állat, $E(x):x$ emlős, $P(x,y):x$-nek y a patrónusa. Így például $P(\text{Harry, szarvas})$ azt jelenti, hogy Harrynek szarvas a patrónusa. Írjuk fel logikai formulákkal a következő magyar nyelvű mondatokat:

   a. Bálintnak fakopáncs a patrónusa.
   b. Minden varázsló férfi.
   c. Minden boszorkány nő, de nem minden nő boszorkány.
   d. Létezik olyan állat, mely boszorkánynak, varázslónak is patrónusa.
   e. Néhány emlősállat csak varázslóknak patrónusa, boszorkányoknak nem.

5. Legyen $A=\{2,3,5,7\}$, $B=\{1,2,3,4\}$. Számítsuk ki $A\Delta B$-t. Adjunk meg három-három lehetőséget olyan C halmazra, melyre:

   a. $A\cap C\subseteq B$.
   b. $\{1,2\}\subseteq A\Delta C\subseteq B$.
   c. $A\cup(B\cap C)=(A\cup B)\cap C$.

6. Választható az alábbi két feladat közül. A választást tüntessük fel a beadott lapon.
   6H: Mi a pontos (azaz szükséges és elégséges) feltétele annak, hogy $A\Delta B\subseteq A$ teljesüljön? Állításunkat igazoljuk. Melyek azok az A halmazok, melyekhez létezik olyan B, melyre $A\Delta B=A\cap B$? Indokoljunk.

   6R: Az alábbi R, illetve S relációkról döntsük el, hogy rendelkeznek-e a reflexív, szimmetrikus, tranzitív, illetve antiszimmetrikus tulajdonsággal az X, illetve Y halmazon. Számítsuk ki az $R\circ S$ és $S\circ R$ relációkat is: adjuk meg rendezett párok halmazaként.

   a. $R=\{(1,2),(2,1),(3,4),(4,3),(2,2),(4,4),(5,5)\}$, $X=\{1,2,3,4,5\}$.
   b. $S=\{(x,y)\mid x,y\in\mathbb{N},|x-y|\leq 2\}$, $Y=\mathbb{N}$.