Számelmélet

Diszkrét matematika 1. feladatsor

Gyakorlatvezető: Uray M. János

1. Bizonyítsuk be, hogy:

   a) $6 \mid n(n+1)(2n+1)$, ha $n \in \mathbb{Z}$; b) $30 \mid n^5 - n$, ha $n \in \mathbb{Z}$;
   c) $960 \mid n(n^2-1)(n^2-4)$, ha $n \in \mathbb{Z}$, $2 \mid n$, de $4 \nmid n$.

2. Bizonyítsuk be, hogy három egymást követő egész szám köbének összege osztható:

   a) a középső szám 3-szorosával; b) 9-cel.

3. Bizonyítsuk be, hogy azok a hatjegyű számok, amelyeknek az első három számjegye megegyezik az utolsó hárommal, oszthatók 7-tel, 11-gyel és 13-mal.

4. Számoljuk ki az alábbi kifejezésket a megadott számrendszerben:

   a) $10011001_2 + 101011010_2$; b) $1001_2 \cdot 1101_2$; c) $1221_3 \cdot 2112_3$; d) $1234_5 + 4321_5$;
   e) $1234_5 \cdot 4321_5$; f) $1236_7 + 6321_7$; g) $10011001_2/101_2$;
   h) $110110010101101_2/101111001_2$; i) $12011_3/201_3$.

5. Számítsuk ki euklideszi algoritmussal az alábbi számpárok legnagyobb közös osztóját, és adjuk meg a legkisebb közös többszörösüket is.

   a) 30 és 22; b) 86 és 31; c) 139 és 102; d) 255 és 111; e) 300 és 132; f) 332 és 88;
   g) 430 és 300; h) 518 és 154; i) 675 és 471; j) 432 és 300; k) 756 és 333;
   l) 504 és 150; m) 420 és 154; n) 1080 és 285; o) 2016 és 880; p) 2355 és 450.

6. Írjuk fel az előző feladat számpárjainak legnagyobb közös osztóját a két szám egész lineáris kombinációjaként.

7. Oldjuk meg az alábbi egyenleteket $x, y \in \mathbb{Z}$-re:

   a) $172x + 62y = 38$; b) $82x + 22y = 34$; c) $450x + 86y = 100$; d) $125x + 45y = -20$.

8. Oldjuk meg az alábbi kongruenciákat:

   a) $3x \equiv 8 \mod 13$; b) $21x \equiv 14 \mod 35$; c) $172x \equiv 6 \mod 62$;
   d) $12x \equiv 9 \mod 18$; e) $26x \equiv 12 \mod 22$; f) $20x \equiv 19 \mod 22$;
   g) $16x \equiv 36 \mod 28$; h) $126x \equiv 46 \mod 99$.

9. Egy ládában százlábúak vannak. Két fajtájuk van, az egyiknek 14 lába van, a másiknak 20. A ládában összesen 232 láb van. Hány százlábú van a ládában?

10. Melyek azok a száznál kisebb természetes számok, amelyek 23-szorosát hetes számrendszerben felírva az utolsó számjegy 5 lesz, az utolsó előtti pedig 2? Kongruenciákkal oldjuk meg.

11. Oldjuk meg az alábbi kongruencia-rendszereket:

a) $\begin{matrix} x \equiv 2 \mod 7 \\ x \equiv 5 \mod 8; \end{matrix}$ b) $\begin{matrix} 3x \equiv 2 \mod 4 \\ 4x \equiv 3 \mod 5; \end{matrix}$ c) $\begin{matrix} 5x \equiv 1 \mod 6 \\ 7x \equiv 9 \mod 10; \end{matrix}$ d) $\begin{matrix} 5x \equiv 2 \mod 6 \\ 7x \equiv 3 \mod 10; \end{matrix}$

e) $\begin{matrix} x \equiv 2 \mod 3 \\ x \equiv 3 \mod 4 \\ x \equiv 1 \mod 5; \end{matrix}$ f) $\begin{matrix} 4x \equiv 2 \mod 3 \\ 3x \equiv 2 \mod 7 \\ 9x \equiv 7 \mod 11; \end{matrix}$ g) $\begin{matrix} 3x \equiv 1 \mod 4 \\ 7x \equiv 2 \mod 9 \\ 9x \equiv 3 \mod 13; \end{matrix}$ h) $\begin{matrix} 5x \equiv 3 \mod 6 \\ 3x \equiv 9 \mod 10 \\ 8x \equiv 9 \mod 15; \end{matrix}$

12. Mi az a legkisebb természetes szám, amely 28-as számrendszerben 3-ra, 19-es számrendszerben 4-re végződik? Kongruenciákkal oldjuk meg.

13. Mennyi $\phi(n)$, ha n:

a) 1; b) 2; c) 3; d) 4; e) 10; f) 24; g) 96; h) 100.

14. Legyen $(n; 7) = 1$, ahol $n \in \mathbb{Z}$. Bizonyítsuk be, hogy:

a) $7 \mid n^6 - 1$; b) $7 \mid n^{12} - 1$; c) $7 \mid n^{6k} - 1$, ahol $k \in \mathbb{Z}$.

15. Bizonyítsuk be, hogy $n^7 \equiv n \mod 42$, ha $n \in \mathbb{Z}$.

16. Bizonyítsuk be, hogy $n^{13} - n$ osztható 2-vel, 3-mal, 5-tel, 7-tel és 13-mal ($n \in \mathbb{Z}$).

17. a) Milyen maradékot ad 173^{163} 17-tel osztva? b) Mi 3^{2017} utolsó három számjegye?
c) Mi 143^{143} utolsó három számjegye hármas számrendszerben?
d) Milyen maradékot ad 323^{149} 63-mal osztva? e) Milyen maradékot ad 423^{173} 52-vel osztva?
f) Milyen maradékot ad 495^{173} 98-cal osztva? g) Milyen maradékot ad 457^{101} 90-nel osztva?

18. a) Milyen maradékot ad $205^{206^{207}}$ 103-mal osztva?
b) Mi $37^{39^{42}}$ utolsó két számjegye? c) Mi $11^{2013^{26}}$ utolsó két számjegye?
d) Mi $17^{3^{2013}}$ utolsó két számjegye nyolcas számrendszerben?

19. Oldjuk meg az alábbi kongruenciákat az Euler–Fermat-tétel segítségével:

a) $3x \equiv 8 \mod 13$; b) $21x \equiv 14 \mod 35$; c) $172x \equiv 6 \mod 62$; d) $12x \equiv 9 \mod 18$.