Komplex számok

Diszkrét matematika 1. feladatsor

Gyakorlatvezető: Uray M. János

1. Írjuk fel algebrai alakban:

   a) $(3+2i)(2+i)$; b) $(1-3i)(i+5)$; c) $(2+i)^2$; d) $(2-5i)^2$; e) $(1-i)^3$.

2. Írjuk fel a lehető legegyszerűbb alakban:

   a) i^3; b) i^5; c) i^8; d) $\frac{1}{i^2}$; e) $\frac{1}{i}$; f) $\frac{1}{i^3}$; g) i^n $(n \in \mathbb{Z})$.

3. Írjuk fel algebrai alakban:

   a) $\frac{1}{1+2i}$; b) $\frac{1}{(1+i)^2}$; c) $\frac{1}{(2-i)(1+2i)}$; d) $\frac{3+4i}{1-2i}$; e) $\frac{\sqrt{3}-i}{\sqrt{3}+i}$; f) $\frac{2+i}{i(-3+4i)}$;

   g) $\frac{1}{2+3i}+\frac{1}{2-3i}$; h) $\frac{1}{3+i}+\frac{1}{1+7i}$; i) $\frac{1}{i(3-2i)(1+i)}$; j) $\frac{i}{(1-i)(1-2i)(1+2i)}$.

4. Oldjuk meg $\mathbb{C}$ fölött:

   a) $x^2-2x+2=0$; b) $x^2+x+1=0$; c) $x^2+2ix-1=0$.

5. Mennyi $x, y \in \mathbb{R}$, ha:

   a) $(x+yi)(2-i)=x+3i$; b) $(x+i)(1+yi)=3y+xi$; c) $(1+2i)x+(3-5i)y=1-3i$;
   d) $\frac{5}{x+yi}+\frac{2}{1+3i}=1$?

6. Ábrázoljuk komplex számsíkon az alábbi feltételnek megfelelő komplex számok halmazát, és adjunk meg három-három ilyen komplex számot:

   a) $\Re(z) \geq 2$; b) $\Im(z) \leq 1$; c) $\Re(z+2i) \leq 0$; d) $\Re(z+1) \geq \Im(z-2i)$;
   e) $|z|=1$; f) $2<|z| \leq 3$; g) $|z-1| \leq 2$; h) $|z-i-1| \leq 3$;
   i) $|z-1|<1 \wedge \Im(z)>0$; j) $|z+i|>2 \wedge \Re(z)<2$;
   k) $|z-3+2i|=|z+4-i|$; l) $|z-i|=2|z-2+i|$;
   m) $z=1/\overline{z}$; n) $z+\overline{z}=0$; o) $|z|=iz$; p) $z^3=|z|$.

7. Írjuk fel trigonometrikus alakban:

   a) $1+i$; b) $\sqrt{3}-i$; c) $4i$; d) -3; e) $\frac{10}{\sqrt{3}-i}$; f) $\frac{2+3i}{5+i}$; g) $3-4i$; h) $-2+i$;

   i) $\frac{1+\sqrt{3}i}{2}$; j) $\frac{-1+\sqrt{3}i}{2}$; k) $\cos\frac{2\pi}{3}-i\sin\frac{2\pi}{3}$; l) $-\cos\frac{2\pi}{3}+i\sin\frac{2\pi}{3}$.

8. Számoljuk ki a trigonometrikus alak használatával:

   a) $(1+i)(-2+2i)$; b) $\dfrac{\sqrt{3}-i}{\sqrt{3}+i}$; c) $\left(\dfrac{-1+\sqrt{3}i}{2}\right)^5$;

   d) $\dfrac{(1+i)^9}{(1-i)^7}$; e) $\left(1-\dfrac{\sqrt{3}-i}{2}\right)^{24}$; f) $\dfrac{\left(-1+\sqrt{3}i\right)^{15}}{(1-i)^{20}}+\dfrac{\left(-1-\sqrt{3}i\right)^{15}}{(1+i)^{20}}$.

9. Vonjunk négyzetgyököt:

   a) -4; b) $2i$; c) $-2+2\sqrt{3}i$; d) $3-4i$; e) $-7-24i$; f) $8+6i$.

10. Oldjuk meg $\mathbb{C}$ fölött:

    a) $x^2-(3-2i)x+(5-5i)=0$; b) $(2+i)x^2-(5-i)x+(2-2i)=0$;
    c) $x^2+(2+i)x-(1+5i)=0$; d) $(15+6i)x^2-(32+36i)x+(8+38i)=0$.

11. Oldjuk meg $\mathbb{C}$ fölött:

    a) $x^3=1$; b) $x^3=i$; c) $x^3=2+2i$; d) $x^4=i$; e) $x^8=\sqrt{3}-i$; f) $x^6=1+i$.

12. Számoljuk ki:

    a) 64 hatodik gyökeit; b) $-16\sqrt{3}+16i$ ötödik gyökeit; c) $\dfrac{7+3i}{5-2i}$ negyedik gyökeit;
    d) $\dfrac{1-i}{\sqrt{3}+i}$ hatodik gyökeit; e) $\dfrac{-4}{(2+i)^3}$ negyedik gyökeit.

13. Melyek:

    a) a primitív harmadik egységgyökök; b) a primitív negyedik egységgyökök;
    c) a primitív második egységgyökök; d) a primitív első egységgyökök;
    e) a primitív hatodik egységgyökök; f) a primitív nyolcadik egységgyökök?

14. Melyek egységgyökök, mennyi ezek rendje, milyen n-re lesznek n-edik egységgyökök, ill. primitív n-edik egységgyökök:

    a) 1; b) -1; c) i; d) $1+i$; e) $\dfrac{1+i}{\sqrt{2}}$; f) $\dfrac{1+\sqrt{3}i}{2}$; g) $\dfrac{-1+\sqrt{3}i}{2}$;

    h) $\cos\left(\dfrac{\pi}{361}\right)+i\sin\left(\dfrac{\pi}{361}\right)$; i) $\cos\left(\sqrt{2}\pi\right)+i\sin\left(\sqrt{2}\pi\right)$?

15. Legyen $\varepsilon\in\mathbb{C}$.

    a) Bizonyítsuk be, hogy ha $\varepsilon^4=i$, akkor $4\mid o(\varepsilon)$.
    b) Ha $o(\varepsilon)=128$, akkor mennyi lehet $o(i\varepsilon)$?

16. Legyen ε primitív n-edik egységgyök. Bizonyítsuk be:

    a) hogy ε hatványai pontosan az n-edik egységgyökök lesznek;
    b) hogy ε pontosan akkor k-adik egységgyök, ha $n\mid k$.