

# Halmazelmélet

Diszkrét matematika 1. feladatsor

Gyakorlatvezető: Uray M. János

1. Legyen:

$$\bullet x = \{1, 2\}; \quad \bullet y = \{\text{alma}, \text{körte}\}.$$

Melyekre igaz, hogy  $x$  eleme, ill.  $x$  részhalmaza:

$$\text{a) } \{x, y\}; \quad \text{b) } \{\{x\}, y\}; \quad \text{c) } x; \quad \text{d) } \emptyset \cap x; \quad \text{e) } \{x\} \setminus \{\{x\}\}; \quad \text{f) } \{x\} \cup x; \quad \text{g) } \{x\} \cup \{\emptyset\}?$$

2. Mi lesz  $\cup \mathcal{A}$  és  $\cap \mathcal{A}$ , ha:

$$\text{a) } \mathcal{A} := \{\{a, b, c\}, \{a, d, e\}, \{a, f\}\}; \quad \text{b) } \mathcal{A} := \{\emptyset, \{\emptyset\}\};$$

$$\text{c) } \mathcal{A} := \{\{x \in \mathbb{N} \mid x \leq y\} \mid y \in \mathbb{N}\}; \quad \text{d) } \mathcal{A} := \{\{x \in \mathbb{R} \mid x^2 < y\} \mid y \in \mathbb{R} \wedge y > 0\}.$$

3. Írjuk fel formálisan, halmazjelöléssel az alábbi halmazokat:

a) páros számok halmaza;    b) pozitív, 3-mal nem osztható egész számok halmaza;

c) négyzetszámok halmaza;    d) racionális számok halmaza;    e) prímszámok halmaza;

f)  $n$ -edik komplex egységgyökök halmaza;    g)  $n$ -edik komplex primitív egységgyökök halmaza;

h) komplex egységgyökök halmaza;    i) egy  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  függvény értékkészlete;

4. Van-e olyan  $A$ ,  $B$  és  $C$  halmaz, amelyre egyszerre teljesül:

$$\bullet A \cap B \neq \emptyset; \quad \bullet A \cap C = \emptyset; \quad \bullet (A \cap B) \setminus C = \emptyset?$$

5. Hozzuk egyszerűbb alakra:

$$\text{a) } \overline{A \cup (B \cap (C \cup \overline{D}))}; \quad \text{b) } \overline{(\overline{A \cap B} \cup C) \cap \overline{A} \cup \overline{B} \cup \overline{C}};$$

$$\text{c) } \overline{(\overline{A} \cup B) \cap (A \cup \overline{B})}; \quad \text{d) } (A \cup (A \cap B) \cup (A \cap B \cap C)) \cap (A \cup B \cup C);$$

$$\text{e) } \overline{(A \cap C \cup B \cap C \cup \overline{A} \cap \overline{B}) \cap C}; \quad \text{f) } (A \cup C) \cap (B \cup C) \cap (A \cup D) \cap (B \cup D).$$

6. Bizonyítsuk be:

$$\text{a) } A \setminus (B \cap C) = (A \setminus B) \cup (A \setminus C); \quad \text{b) } A \setminus (B \cup C) = (A \setminus B) \setminus C.$$

7. Melyek igazak minden  $A$ ,  $B$  és  $C$  halmazra:

$$\text{a) } (A \cup B) \cap A = (A \cap B) \cup A; \quad \text{b) } A \setminus (A \cap B) = A \setminus B; \quad \text{c) } (A \cup B) \setminus A = B;$$

$$\text{d) } (A \cup B) \setminus C = A \cup (B \setminus C); \quad \text{e) } (A \setminus B) \cap C = (A \cap C) \setminus B = (A \cap C) \setminus (B \cap C)?$$

8. Bizonyítsuk be:

$$\text{a) } A \cap B \subseteq C \Leftrightarrow A \subseteq \overline{B} \cup C; \quad \text{b) } (A \cap B) \cup C = A \cap (B \cup C) \Leftrightarrow C \subseteq A;$$

$$\text{c) } (A \setminus B) \cup B = A \Leftrightarrow B \subseteq A; \quad \text{d) } A \cup B = A \Leftrightarrow A \cap B = B;$$

$$\text{e) } A = \emptyset \Leftrightarrow B = A \Delta B; \quad \text{f) } A \Delta B = C \Leftrightarrow B \Delta C = A.$$

9. Bizonyítsuk be:

a)  $A \triangle \emptyset = A$ ;   b)  $A \triangle A = \emptyset$ ;   c)  $A \triangle (A \triangle B) = B$ ;   d)  $A \triangle (B \triangle C) = (A \triangle B) \triangle C$ .

10. Írjuk fel az alábbi hatványhalmazokat:

a)  $2^\emptyset$ ;   b)  $2^{\{a\}}$ ;   c)  $2^{\{a,b\}}$ ;   d)  $2^{\{a,b,c\}}$ ;   e)  $2^{2^\emptyset}$ .