

Számelmélet

Diszkrét matematika 1. feladatsor

Gyakorlatvezető: Uray M. János

- Bizonyítsuk be, hogy:
 - $6 \mid n(n+1)(2n+1)$, ha $n \in \mathbb{Z}$;
 - $30 \mid n^5 - n$, ha $n \in \mathbb{Z}$;
 - $960 \mid n(n^2 - 1)(n^2 - 4)$, ha $n \in \mathbb{Z}$, $2 \mid n$, de $4 \nmid n$.
- Bizonyítsuk be, hogy három egymást követő egész szám köbének összege osztható:
 - a középső szám 3-szorosával;
 - 9-cel.
- Bizonyítsuk be, hogy azok a hatjegyű számok, amelyeknek az első három számjegye megegyezik az utolsó hárommal, oszthatók 7-tel, 11-gyel és 13-mal.
- Számoljuk ki az alábbi kifejezést a megadott számrendszerben:
 - $10011001_2 + 101011010_2$;
 - $1001_2 \cdot 1101_2$;
 - $1221_3 \cdot 2112_3$;
 - $1234_5 + 4321_5$;
 - $1234_5 \cdot 4321_5$;
 - $1236_7 + 6321_7$;
 - $10011001_2 / 101_2$;
 - $110110010101101_2 / 101111001_2$;
 - $12011_3 / 201_3$.
- Számítsuk ki euklideszi algoritmussal az alábbi számpárok legnagyobb közös osztóját, és adjuk meg a legkisebb közös többszörösüket is.
 - 30 és 22;
 - 86 és 31;
 - 139 és 102;
 - 255 és 111;
 - 300 és 132;
 - 332 és 88;
 - 430 és 300;
 - 518 és 154;
 - 675 és 471;
 - 432 és 300;
 - 756 és 333;
 - 504 és 150;
 - 420 és 154;
 - 1080 és 285;
 - 2016 és 880;
 - 2355 és 450.
- Írjuk fel az előző feladat számpárjainak legnagyobb közös osztóját a két szám egész lineáris kombinációjaként.
- Oldjuk meg az alábbi egyenleteket $x, y \in \mathbb{Z}$ -re:
 - $172x + 62y = 38$;
 - $82x + 22y = 34$;
 - $450x + 86y = 100$;
 - $125x + 45y = -20$.
- Oldjuk meg az alábbi kongruenciákat:
 - $3x \equiv 8 \pmod{13}$;
 - $21x \equiv 14 \pmod{35}$;
 - $172x \equiv 6 \pmod{62}$;
 - $12x \equiv 9 \pmod{18}$;
 - $26x \equiv 12 \pmod{22}$;
 - $20x \equiv 19 \pmod{22}$;
 - $16x \equiv 36 \pmod{28}$;
 - $126x \equiv 46 \pmod{99}$.
- Egy ládában százlábúak vannak. Két fajtájuk van, az egyiknek 14 lába van, a másiknak 20. A ládában összesen 232 láb van. Hány százlábú van a ládában?
- Melyek azok a száznál kisebb természetes számok, amelyek 23-szorosát hetes számrendszerben felírva az utolsó számjegy 5 lesz, az utolsó előtti pedig 2? Kongruenciákkal oldjuk meg.

11. Oldjuk meg az alábbi kongruencia-rendszereket:

a) $x \equiv 2 \pmod{7}$ b) $3x \equiv 2 \pmod{4}$ c) $5x \equiv 1 \pmod{6}$ d) $5x \equiv 2 \pmod{6}$
 $x \equiv 5 \pmod{8}$; $4x \equiv 3 \pmod{5}$; $7x \equiv 9 \pmod{10}$; $7x \equiv 3 \pmod{10}$;

$x \equiv 2 \pmod{3}$ $4x \equiv 2 \pmod{3}$ $3x \equiv 1 \pmod{4}$ $5x \equiv 3 \pmod{6}$
e) $x \equiv 3 \pmod{4}$ f) $3x \equiv 2 \pmod{7}$ g) $7x \equiv 2 \pmod{9}$ h) $3x \equiv 9 \pmod{10}$
 $x \equiv 1 \pmod{5}$; $9x \equiv 7 \pmod{11}$; $9x \equiv 3 \pmod{13}$; $8x \equiv 9 \pmod{15}$;

12. Mi az a legkisebb természetes szám, amely 28-as számrendszerben 3-ra, 19-es számrendszerben 4-re végződik? Kongruenciákkal oldjuk meg.

13. Mennyi $\phi(n)$, ha n :

a) 1; b) 2; c) 3; d) 4; e) 10; f) 24; g) 96; h) 100.

14. Legyen $(n; 7) = 1$, ahol $n \in \mathbb{Z}$. Bizonyítsuk be, hogy:

a) $7 \mid n^6 - 1$; b) $7 \mid n^{12} - 1$; c) $7 \mid n^{6k} - 1$, ahol $k \in \mathbb{Z}$.

15. Bizonyítsuk be, hogy $n^7 \equiv n \pmod{42}$, ha $n \in \mathbb{Z}$.

16. Bizonyítsuk be, hogy $n^{13} - n$ osztható 2-vel, 3-mal, 5-tel, 7-tel és 13-mal ($n \in \mathbb{Z}$).

17. a) Milyen maradékot ad 173^{163} 17-tel osztva? b) Mi 3^{2017} utolsó három számjegye?

c) Mi 143^{143} utolsó három számjegye hármasszámrendszerben?

d) Milyen maradékot ad 323^{149} 63-mal osztva? e) Milyen maradékot ad 423^{173} 52-vel osztva?

f) Milyen maradékot ad 495^{173} 98-cal osztva? g) Milyen maradékot ad 457^{101} 90-nel osztva?

18. a) Milyen maradékot ad $205^{206^{207}}$ 103-mal osztva?

b) Mi $37^{39^{42}}$ utolsó két számjegye? c) Mi $11^{2013^{26}}$ utolsó két számjegye?

d) Mi $17^{3^{2013}}$ utolsó két számjegye nyolcas számrendszerben?

19. Oldjuk meg az alábbi kongruenciákat az Euler–Fermat-tétel segítségével:

a) $3x \equiv 8 \pmod{13}$; b) $21x \equiv 14 \pmod{35}$; c) $172x \equiv 6 \pmod{62}$; d) $12x \equiv 9 \pmod{18}$.