

Relációk, függvények

Diszkrét matematika 1. feladatsor

Gyakorlatvezető: Uray M. János

1. Az alábbi relációk közül melyik

- reflexív, • irreflexív, • szimmetrikus, • antiszimmetrikus,
- szigorúan antiszimmetrikus, • tranzitív, • dichotom, • trichotom:

- a) $\leq_{\mathbb{R}}$; b) $<_{\mathbb{R}}$; c) $\subseteq$; d) $\subset$; e) $R \subseteq \mathbb{Z}^+ \times \mathbb{Z}^+, xRy \Leftrightarrow x|y$;
f) $R \subseteq \mathbb{C} \times \mathbb{C}, xRy \Leftrightarrow \Re(x) \leq \Re(y)$; g) $R \subseteq \mathbb{C} \times \mathbb{C}, xRy \Leftrightarrow \Re(x) = \Re(y)$;
h) {síkbeli körök}-ön a „van közös pontja”; i) {emberek}-en az „ismeri”;
j) {emberek}-en a „rokona”; k) {emberek}-en a „testvére”;
l) $X = \{\text{kő, papír, olló}\}, R = \{(\text{kő, olló}), (\text{olló, papír}), (\text{papír, kő})\}$;
m) $X = \{a, b, c\}, R = \{(a, b), (b, a), (b, b), (a, c)\}$?

2. Mutassuk meg, hogy ekvivalenciareláció ($\sim \subseteq X \times X$). Milyen osztályozást határoz meg?

- a) $X = \mathbb{C}, z \sim w \Leftrightarrow |z| = |w|$; b) $X = \mathbb{C} \setminus \{0\}, z \sim w \Leftrightarrow z/w = \pm 1$;
c) $X = \mathbb{C} \setminus \{0\}, n \in \mathbb{N}^+, z \sim w \Leftrightarrow (z/w)^n = 1$; d) $X = \mathbb{Z}, x \sim y \Leftrightarrow 5|(x - y)$;
e) $X = \mathbb{N} \times \mathbb{N}, (p, q) \sim (r, s) \Leftrightarrow p + s = r + q$.

3. Mi az $R \cap S$ reláció, ha:

- $R \subseteq \mathbb{N} \times \mathbb{N}, mRn \Leftrightarrow m|n$ és • $S \subseteq \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}, mSn \Leftrightarrow n = m + 6$.

4. Határozzuk meg az értelmezési tartományát, értékkészletét, és döntsük el, hogy függvény-e:

- a) $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 3 < x < 6 \wedge x < y < 2x\}$; b) $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid |x| + |y| \leq 1\}$;
c) $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = (x - 1)/(1 - x^2)\}$; d) $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y(1 - x^2) = x - 1\}$;
e) $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid |x| = |y|\}$; f) $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = x - \lfloor x \rfloor\}$.

5. Az alábbi függvények közül melyik

- injektív, • szürjektív, • bijektív:

- a) $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = x^2$; b) $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_0^+, f(x) = x^2$; c) $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = x^3$;
d) $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}, f(n) = n^2$; e) $f : \{a, b, c\} \rightarrow \{a, b, c\}, f(a) = b, f(b) = a, f(c) = c$.

6. Mutassuk meg:

- a) ha R tranzitív és irreflexív reláció, akkor szigorúan antiszimmetrikus;
b) ha R ekvivalenciareláció, akkor R^{-1} is az; c) ha R részbenrendezés, akkor R^{-1} is az;
d) ha R tranzitív reláció, akkor $R \circ R$ is az; e) ha R reláció, akkor $R^{-1} \circ R$ szimmetrikus;
f) ha R tranzitív és reflexív reláció, akkor $R = R \circ R$;
g) ha f és g injektív, akkor $f \circ g$ is injektív; h) ha f és g szürjektív, akkor $f \circ g$ is szürjektív;
i) ha f és g bijektív, akkor $f \circ g$ is bijektív.