

Komplex számok

Diszkrét matematika 1. feladatsor

Gyakorlatvezető: Uray M. János

1. Írjuk fel algebrai alakban:

a) $(3 + 2i)(2 + i)$; b) $(1 - 3i)(i + 5)$; c) $(2 + i)^2$; d) $(2 - 5i)^2$; e) $(1 - i)^3$.

2. Írjuk fel a lehető legegyszerűbb alakban:

a) i^3 ; b) i^5 ; c) i^8 ; d) $\frac{1}{i^2}$; e) $\frac{1}{i}$; f) $\frac{1}{i^3}$; g) i^n ($n \in \mathbb{Z}$).

3. Írjuk fel algebrai alakban:

a) $\frac{1}{1 + 2i}$; b) $\frac{1}{(1 + i)^2}$; c) $\frac{1}{(2 - i)(1 + 2i)}$; d) $\frac{3 + 4i}{1 - 2i}$; e) $\frac{\sqrt{3} - i}{\sqrt{3} + i}$; f) $\frac{2 + i}{i(-3 + 4i)}$;
g) $\frac{1}{2 + 3i} + \frac{1}{2 - 3i}$; h) $\frac{1}{3 + i} + \frac{1}{1 + 7i}$; i) $\frac{1}{i(3 - 2i)(1 + i)}$; j) $\frac{i}{(1 - i)(1 - 2i)(1 + 2i)}$.

4. Oldjuk meg $\mathbb{C}$ fölött:

a) $x^2 - 2x + 2 = 0$; b) $x^2 + x + 1 = 0$; c) $x^2 + 2ix - 1 = 0$.

5. Mennyi $x, y \in \mathbb{R}$, ha:

a) $(x + yi)(2 - i) = x + 3i$; b) $(x + i)(1 + yi) = 3y + xi$; c) $(1 + 2i)x + (3 - 5i)y = 1 - 3i$;
d) $\frac{5}{x + yi} + \frac{2}{1 + 3i} = 1$?

6. Ábrázoljuk a komplex számsíkon az alábbi feltételnek megfelelő komplex számok halmazát:

a) $\Re(z) \geq 2$; b) $\Im(z) \leq 1$; c) $\Re(z + 2i) \leq 0$; d) $\Re(z + 1) \geq \Im(z - 2i)$;
e) $|z| = 1$; f) $2 < |z| \leq 3$; g) $|z - 1| \leq 2$; h) $|z - i - 1| \leq 3$;
i) $|z - 1| < 1 \wedge \Re(z) > 0$; j) $|z + i| > 2 \wedge \Im(z) < 2$;
k) $|z - 3 + 2i| = |z + 4 - i|$; l) $|z - i| = 2|z - 2 + i|$;
m) $z = 1/\bar{z}$; n) $z + \bar{z} = 0$; o) $|z| = iz$.

7. Írjuk fel trigonometrikus alakban:

a) $1 + i$; b) $\sqrt{3} - i$; c) $4i$; d) -3 ; e) $\frac{10}{\sqrt{3} - i}$; f) $\frac{2 + 3i}{5 + i}$; g) $3 - 4i$; h) $-2 + i$;
i) $\frac{1 + \sqrt{3}i}{2}$; j) $\frac{-1 + \sqrt{3}i}{2}$; k) $\cos \frac{2\pi}{3} - i \sin \frac{2\pi}{3}$; l) $-\cos \frac{2\pi}{3} + i \sin \frac{2\pi}{3}$.

8. Számoljuk ki a trigonometrikus alak használatával:

a) $(1+i)(-2+2i)$; b) $\frac{\sqrt{3}-i}{\sqrt{3}+i}$; c) $\left(\frac{-1+\sqrt{3}i}{2}\right)^5$;
d) $\frac{(1+i)^9}{(1-i)^7}$; e) $\left(1-\frac{\sqrt{3}-i}{2}\right)^{24}$; f) $\frac{(-1+\sqrt{3}i)^{15}}{(1-i)^{20}} + \frac{(-1-\sqrt{3}i)^{15}}{(1+i)^{20}}$.

9. A következő $\mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ leképezések milyen geometriai transzformációkat jelentenek a komplex számsíkon:

a) $z \mapsto z+i$; b) $z \mapsto 2z$; c) $z \mapsto 3z+2$; d) $z \mapsto iz$; e) $z \mapsto (1+i)z$;
f) $z \mapsto \bar{z}$; g) $z \mapsto \operatorname{Re}(z)$; h) $z \mapsto \operatorname{Im}(z)$; i) $z \mapsto 2z+\bar{z}$; j) $z \mapsto 1/\bar{z}$?

10. Vonjunk négyzetgyököt:

a) -4 ; b) $2i$; c) $-2+2\sqrt{3}i$; d) $3-4i$; e) $-7-24i$; f) $8+6i$.

11. Oldjuk meg $\mathbb{C}$ fölött:

a) $x^2 - (3-2i)x + (5-5i) = 0$; b) $(2+i)x^2 - (5-i)x + (2-2i) = 0$;
c) $x^2 + (2+i)x - (1+5i) = 0$; d) $(15+6i)x^2 - (32+36i)x + (8+38i) = 0$.

12. Oldjuk meg $\mathbb{C}$ fölött:

a) $x^3 = 1$; b) $x^3 = i$; c) $x^3 = 2+2i$; d) $x^4 = i$; e) $x^8 = \sqrt{3}-i$; f) $x^6 = 1+i$.

13. Számoljuk ki:

a) 64 hatodik gyökeit; b) $-16\sqrt{3}+16i$ ötödik gyökeit; c) $\frac{7+3i}{5-2i}$ negyedik gyökeit;
d) $\frac{1-i}{\sqrt{3}+i}$ hatodik gyökeit; e) $\frac{-4}{(2+i)^3}$ negyedik gyökeit.

14. Melyek:

a) a primitív harmadik egységgyökök; b) a primitív negyedik egységgyökök;
c) a primitív második egységgyökök; d) a primitív első egységgyökök;
e) a primitív hatodik egységgyökök; f) a primitív nyolcadik egységgyökök?

15. Melyek egységgyökök, mennyi ezek rendje, milyen n -re lesznek n -edik egységgyökök, ill. primitív n -edik egységgyökök:

a) 1; b) -1 ; c) i ; d) $1+i$; e) $\frac{1+i}{\sqrt{2}}$; f) $\frac{1+\sqrt{3}i}{2}$; g) $\frac{-1+\sqrt{3}i}{2}$;
h) $\cos\left(\frac{\pi}{361}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{361}\right)$; i) $\cos\left(\sqrt{2}\pi\right) + i\sin\left(\sqrt{2}\pi\right)$?

16. Legyen $\varepsilon \in \mathbb{C}$.

a) Bizonyítsuk be, hogy ha $\varepsilon^4 = i$, akkor $4 \mid o(\varepsilon)$.
b) Ha $o(\varepsilon) = 128$, akkor mennyi lehet $o(i\varepsilon)$?

17. Legyen ε primitív n -edik egységgyök. Bizonyítsuk be:

a) hogy ε hatványai pontosan az n -edik egységgyökök lesznek;
b) hogy ε pontosan akkor k -adik egységgyök, ha $n \mid k$.