

Halmazelmélet

Diszkrét matematika 1. feladatsor

Gyakorlatvezető: Uray M. János

1. Legyen:

$$\bullet x = \{1, 2\}; \quad \bullet y = \{\text{alma}, \text{körte}\}.$$

Melyekre igaz, hogy x eleme, ill. x részhalmaza:

$$\text{a) } \{x, y\}; \quad \text{b) } \{\{x\}, y\}; \quad \text{c) } x; \quad \text{d) } \emptyset \cap x; \quad \text{e) } \{x\} \setminus \{\{x\}\}; \quad \text{f) } \{x\} \cup x; \quad \text{g) } \{x\} \cup \{\emptyset\}?$$

2. Legyen $\mathcal{A} := \{\{a, b, c\}, \{a, d, e\}, \{a, f\}\}$. Mi:

$$\text{a) } \cup \mathcal{A}; \quad \text{b) } \cap \mathcal{A}?$$

3. Van-e olyan A , B és C halmaz, amelyre egyszerre teljesül:

$$\bullet A \cap B \neq \emptyset; \quad \bullet A \cap C = \emptyset; \quad \bullet (A \cap B) \setminus C = \emptyset?$$

4. Bizonyítsuk be:

$$\text{a) } A \setminus (B \cap C) = (A \setminus B) \cup (A \setminus C); \quad \text{b) } A \setminus (B \cup C) = (A \setminus B) \setminus C.$$

5. Melyek igazak minden A , B és C halmazra:

$$\begin{aligned} \text{a) } (A \cup B) \cap A &= (A \cap B) \cup A; & \text{b) } A \setminus (A \cap B) &= A \setminus B; & \text{c) } (A \cup B) \setminus A &= B; \\ \text{d) } (A \cup B) \setminus C &= A \cup (B \setminus C); & \text{e) } (A \setminus B) \cap C &= (A \cap C) \setminus B = (A \cap C) \setminus (B \cap C)? \end{aligned}$$

6. Bizonyítsuk be:

$$\begin{aligned} \text{a) } A \cap B \subseteq C &\Leftrightarrow A \subseteq \overline{B} \cup C; & \text{b) } (A \cap B) \cup C &= A \cap (B \cup C) \Leftrightarrow C \subseteq A; \\ \text{c) } (A \setminus B) \cup B &= A \Leftrightarrow B \subseteq A; & \text{d) } A \cup B &= A \Leftrightarrow A \cap B = B; \\ \text{e) } A = \emptyset &\Leftrightarrow B = A \triangle B; & \text{f) } A \triangle B &= C \Leftrightarrow B \triangle C = A. \end{aligned}$$

7. Hozzuk egyszerűbb alakra:

$$\begin{aligned} \text{a) } \overline{A \cup (B \cap (C \cup D))}; & \quad \text{b) } \overline{(A \cap B \cup C) \cap \overline{A} \cup \overline{B} \cup \overline{C}}; \\ \text{c) } \overline{(\overline{A} \cup B) \cap (A \cup \overline{B})}; & \quad \text{d) } (A \cup (A \cap B) \cup (A \cap B \cap C)) \cap (A \cup B \cup C); \\ \text{e) } \overline{(A \cap C \cup B \cap C \cup \overline{A} \cap \overline{B})} \cap C; & \quad \text{f) } (A \cup C) \cap (B \cup C) \cap (A \cup D) \cap (B \cup D). \end{aligned}$$

8. Bizonyítsuk be:

$$\text{a) } A \triangle \emptyset = A; \quad \text{b) } A \triangle A = \emptyset; \quad \text{c) } A \triangle (A \triangle B) = B; \quad \text{d) } A \triangle (B \triangle C) = (A \triangle B) \triangle C.$$

9. Írjuk fel a hatványhalmazát:

$$\text{a) } \emptyset; \quad \text{b) } \{a\}; \quad \text{c) } \{a, b\}; \quad \text{d) } \{a, b, c\}.$$